



# Principes d'asservissement

François Bondu

*Univ Rennes, CNRS, INSTITUT FOTON - UMR6082, F-35000 Rennes*

## Description d'une boucle d'asservissement en métrologie

éléments : capteur (sensibilité, bruit lecture, bruit référence), actionneur, correcteur,  
équations de boucle  
performance en boucle fermée  
mesures en boucle fermée  
critères de stabilité

## Conception d'un asservissement

Intégrateurs multiples  
Boucles imbriquées  
Résonances mécaniques  
Retard pur

## Simulation

## Compléments sur les asservissements de fréquence

peigne : 2 degrés de liberté, feedback vs. feedforward  
linéarité du PDH et choix de la finesse

$s(t)$  signal temporel [u]

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds(f)e^{i2\pi ft} \quad \text{formule de Cramér}$$

N.B. pas une TF ! N.B.2  $ds(f)$  fonction non continue

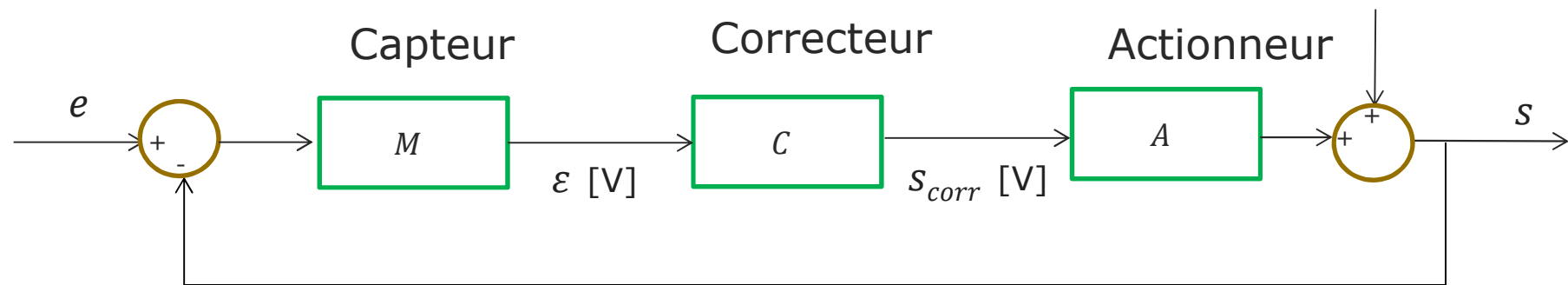
$S(f)$  densité spectrale de puissance [ $u^2/\text{Hz}$ ]

$$S(f)df \triangleq 2 \langle |ds(f)|^2 \rangle \quad \text{définition DSP monolatérale } (f > 0)$$

Spectrum estimation and Harmonic Analysis,  
D. Thomson, proceedings of the IEEE  
Spectral Analysis for Physical Applications,  
D. Percival, A. Walden, Cambridge ed.

$\tilde{s}(f) = \sqrt{S(f)}$  densité spectrale linéaire [ $u/\sqrt{\text{Hz}}$ ]

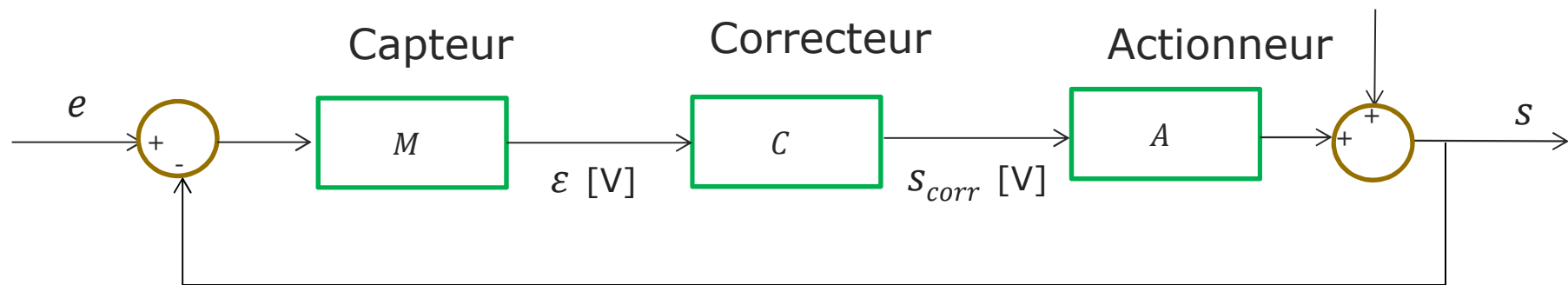
## Capteur, correcteur, actionneur



### Restriction

- aux systèmes linéaires invariants dans le temps
- 1 degré de liberté
- surtout systèmes correspondants à équations différentielles à coefficients constants
- Systèmes échantillonnés : une équivalence simple

## Boucle en métrologie



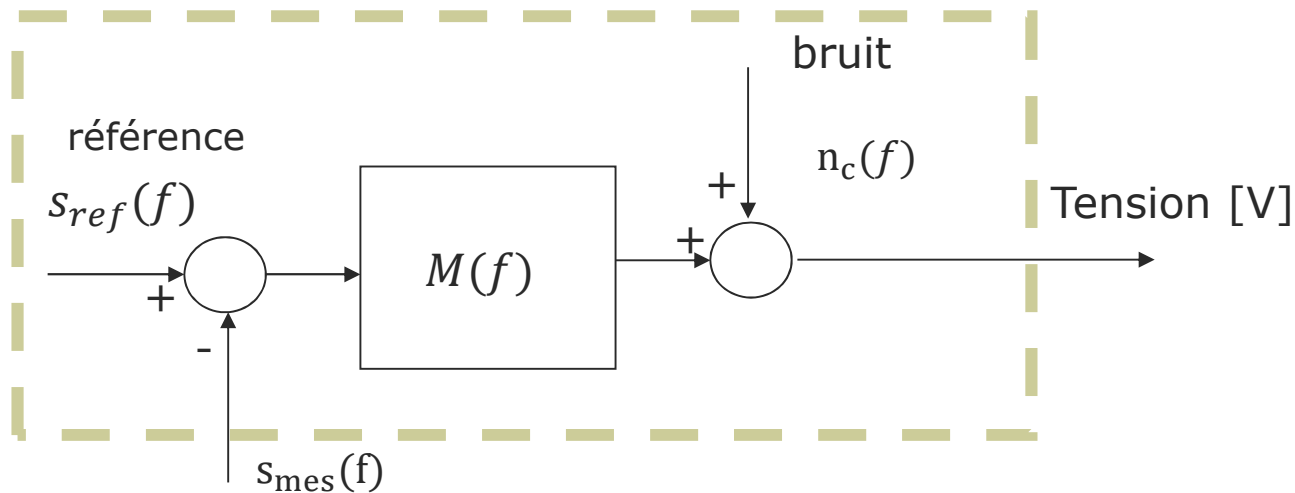
Boucles « standards » (ouvrages sur les asservissements) :

- Référence = commande variable

Boucles en métrologie :

- Référence = aussi stable que possible, variations de  $e(t)$  = bruit

Capteur = comparateur : sensibilité et résolution



**Sensibilité** :  $M(f = 0)$

Vocabulaire International de la Métrologie,  
BIPM, JCGM 200:2012

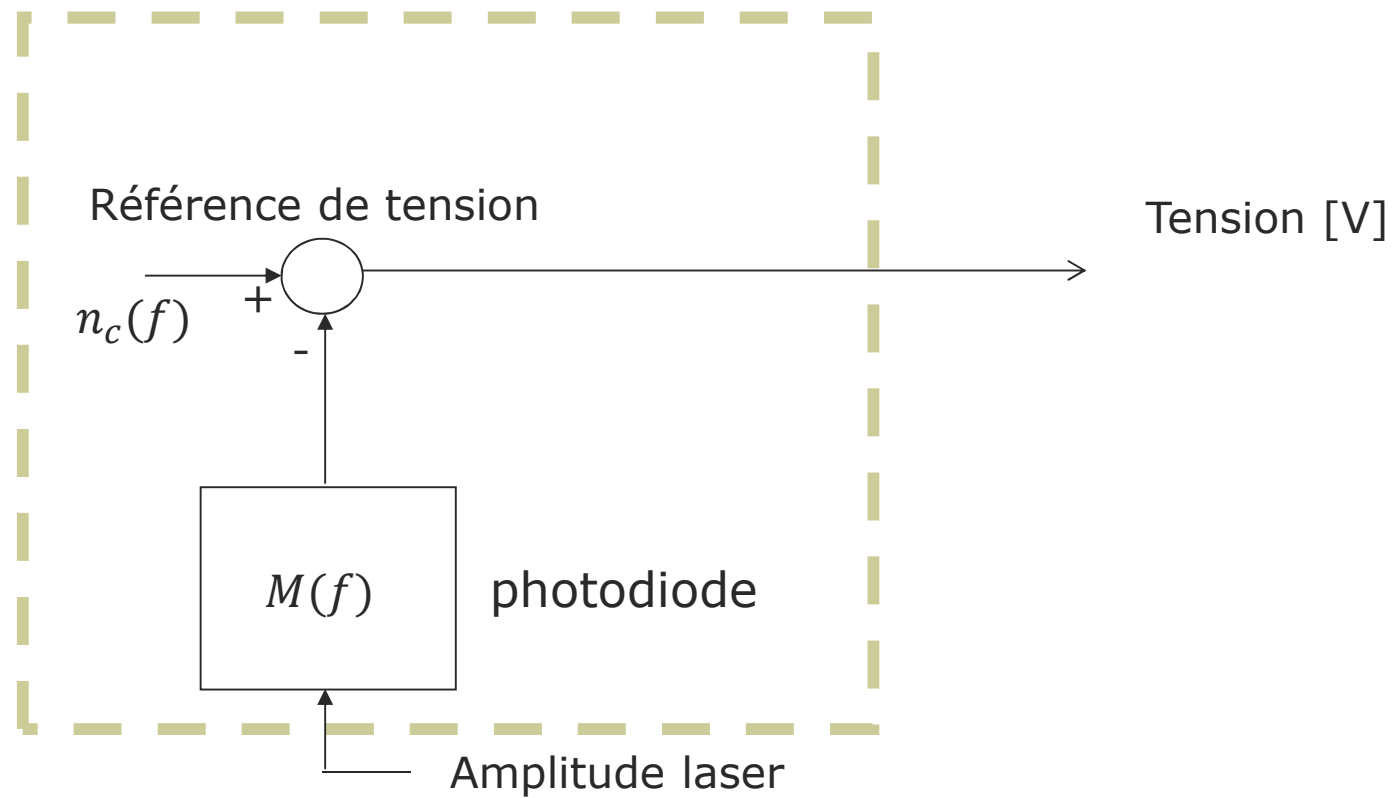
**Bruits de lecture** :  $n_c(f)$

bruit électronique, bruit quantique

**Résolution** :  $S_{reso}(f) = S_{ref}(f) + \frac{S_{n_c}}{|M(f)|^2}$

Une sensibilité élevée réduit l'impact des bruits de lecture

Capteur : comparateur // amplitude



## Capteur : comparateur // fréquence de raie

+ gamme  $f > 1$  Hz

cavité

+ rigide ULE

J. Hall, A. Brillet 1996, J. Bergquist 1999

+ longue à miroirs suspendus

R. Weiss 1972, A. Brillet 1995,...

interféromètre de Michelson fibré

G. Santarelli, F. Kéfélian, P. Lemonde 2009

« auto-hétérodyne » : Mach-Zehnder + modulateur L. Richter, ..., P McGrath 1986

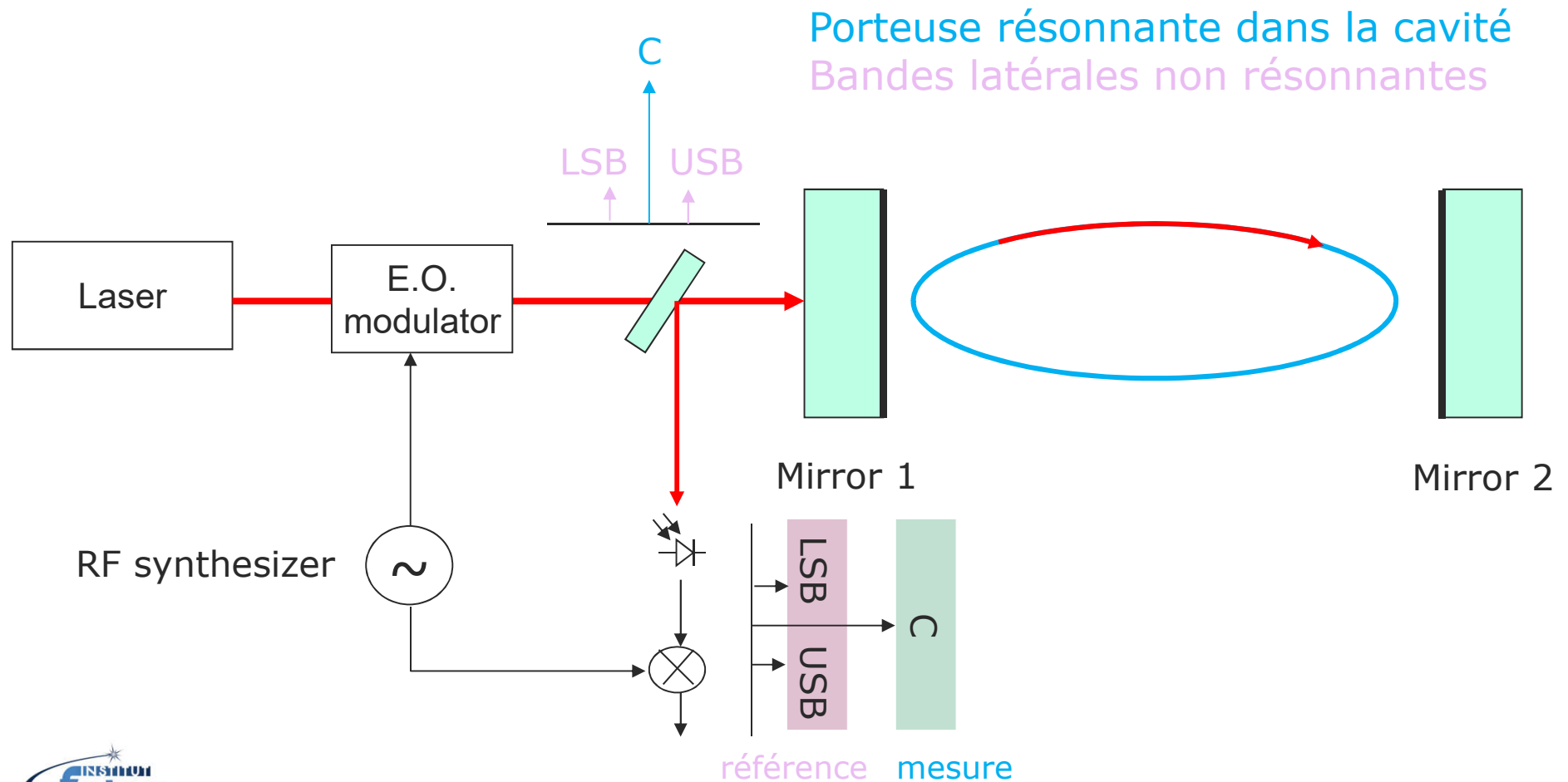
+ gamme  $f < 1$  Hz

atomes (froids)

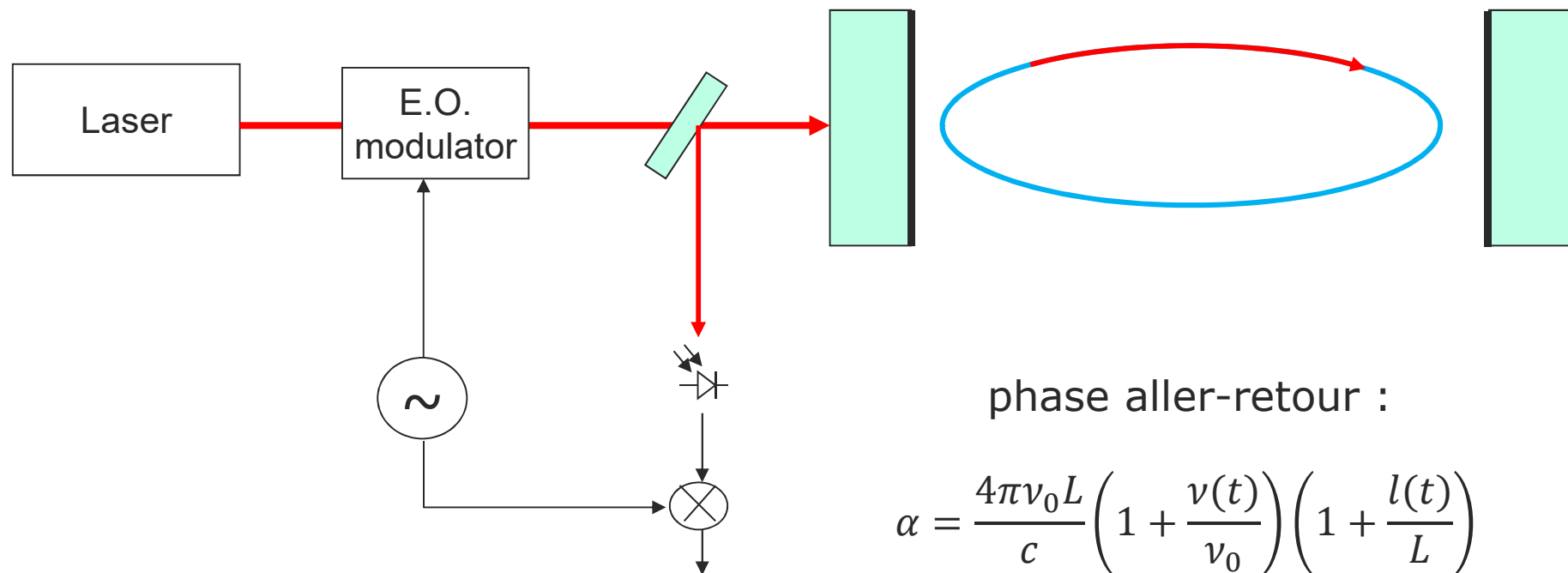
GPS



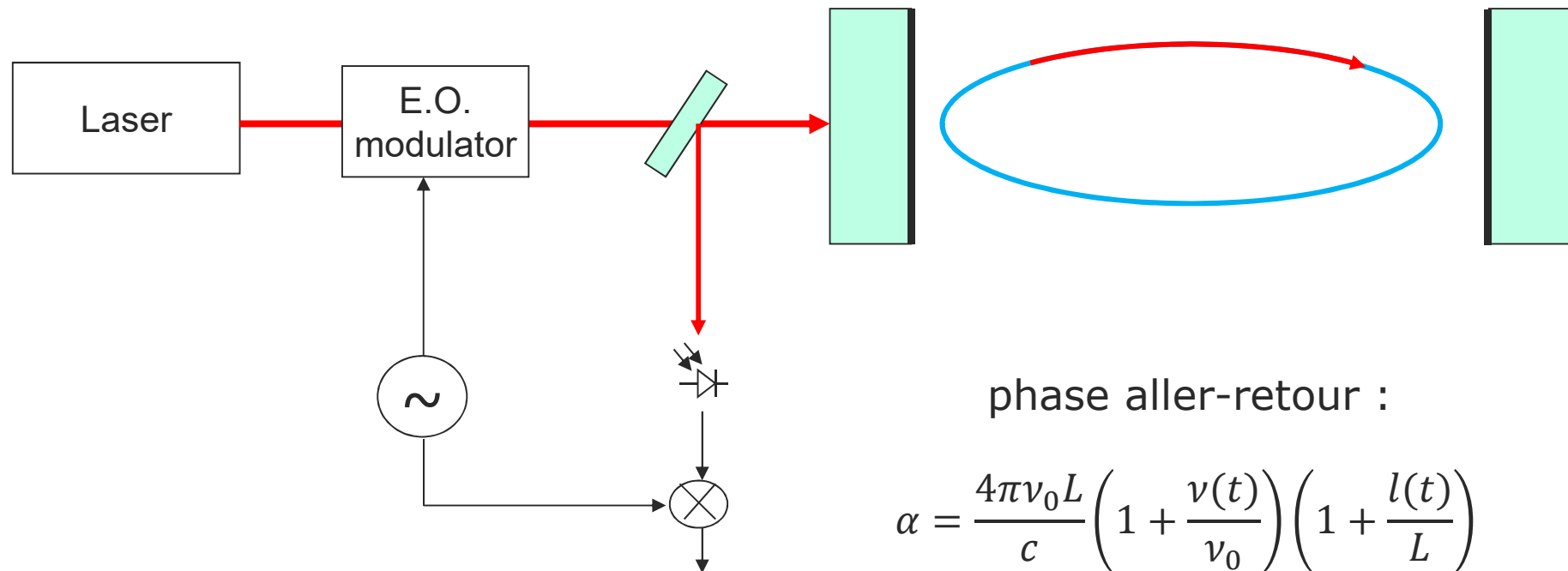
Capteur : comparateur // fréquence de raie  
Méthode Pound-Drever-Hall



Capteur : comparateur // fréquence de raie  
Méthode Pound-Drever-Hall



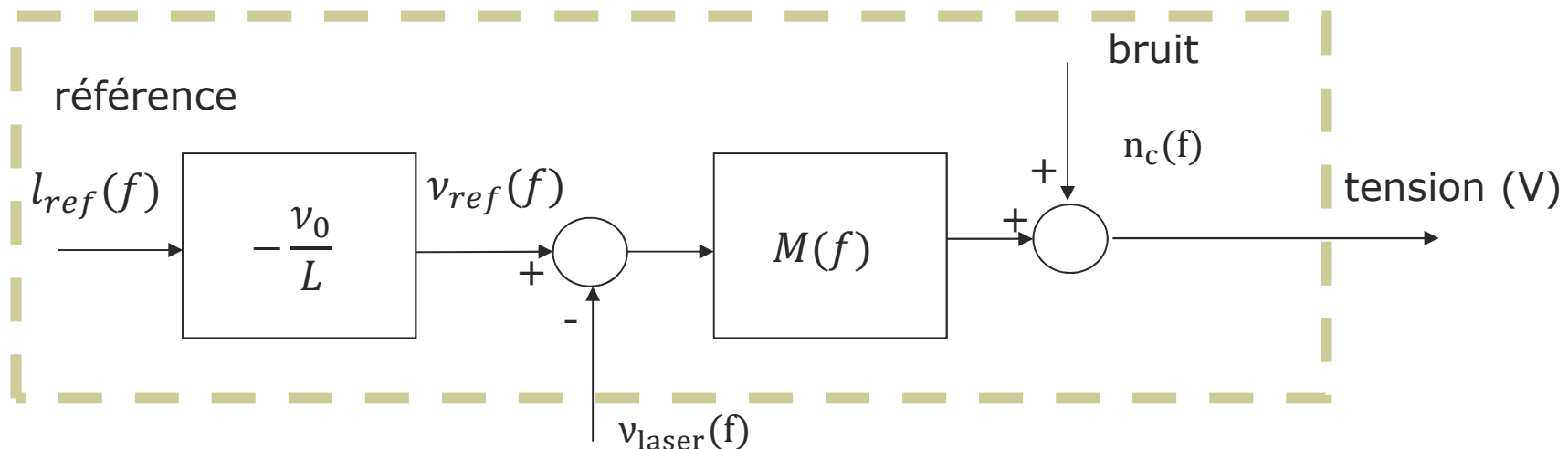
Capteur : comparateur // fréquence de raie  
Méthode Pound-Drever-Hall



⇒ Fréquence du mode résonnant :

$$\frac{\nu_{ref}(t)}{\nu_0} = -\frac{l(t)}{L}$$

Capteur : comparateur // fréquence de raie  
Méthode Pound-Drever-Hall



$$S_{v_{reso}}(f) = S_{v_{reso}}(f) + \frac{S_{n_c}}{|M(f)|^2}$$

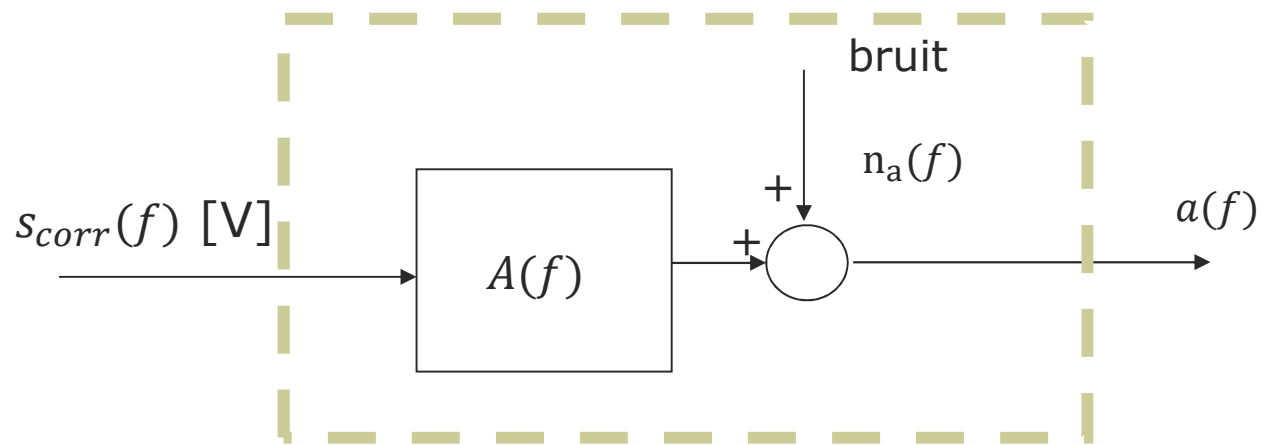
$$M(f) \propto \frac{P_{opt}}{LW_{cav}} \frac{1}{1 + \frac{if}{LW_{cav}/2}}$$

- « Grande finesse » pour la mesure de fréquence
- Stabilité dimensionnelle de la cavité

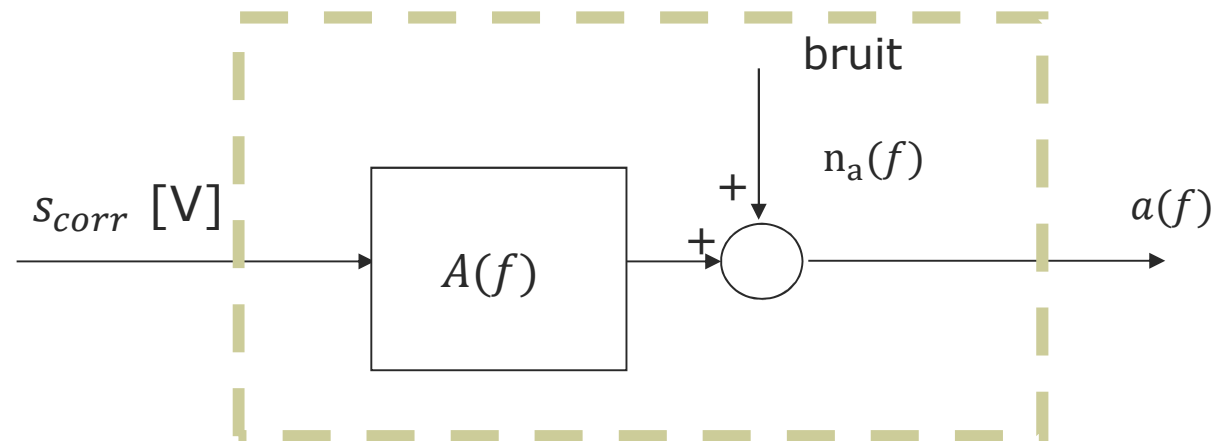
## Capteur : comparateur

- Capteurs du commerce : bruits « ramenés à l'entrée »
- Capteurs conçus au laboratoire pour la métrologie :
  - « bruits de lecture »
  - Sensibilité
  - Bruit de la référence

## Actionneur



## Actionneur

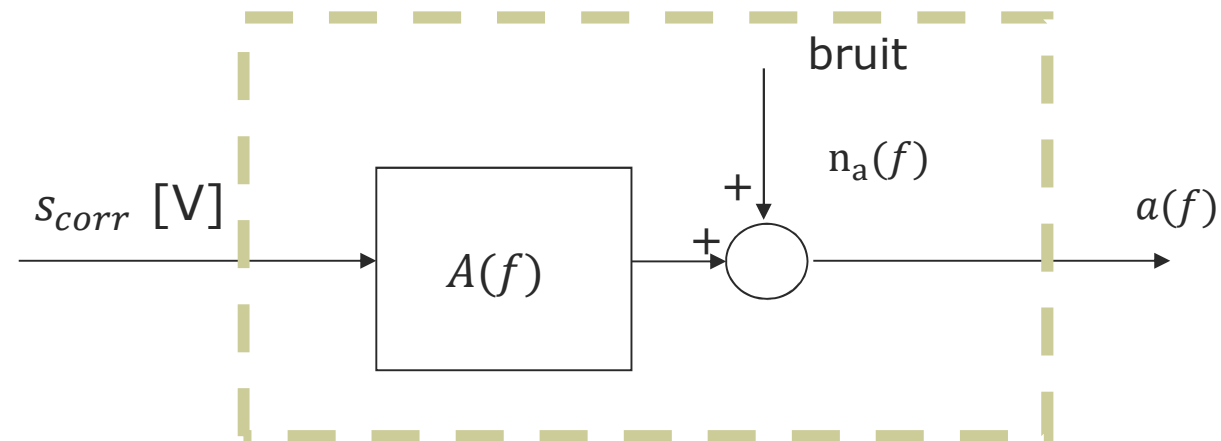


## Amplitude :

- pompe du laser (courant ou laser de pompe)
- modulateur d'amplitude
- courant de pompe d'amplificateur  
amortissement supplémentaire si amplificateur saturé

Danion et al. Opt. Lett. 2014

## Actionneur



## Fréquence :

- longueur de cavité laser
- courant de pompe d'un laser semi-conducteur
- bande passante limitée qq 100 kHz laser semiconducteur :
- dépendance thermique de la constante d'Henry

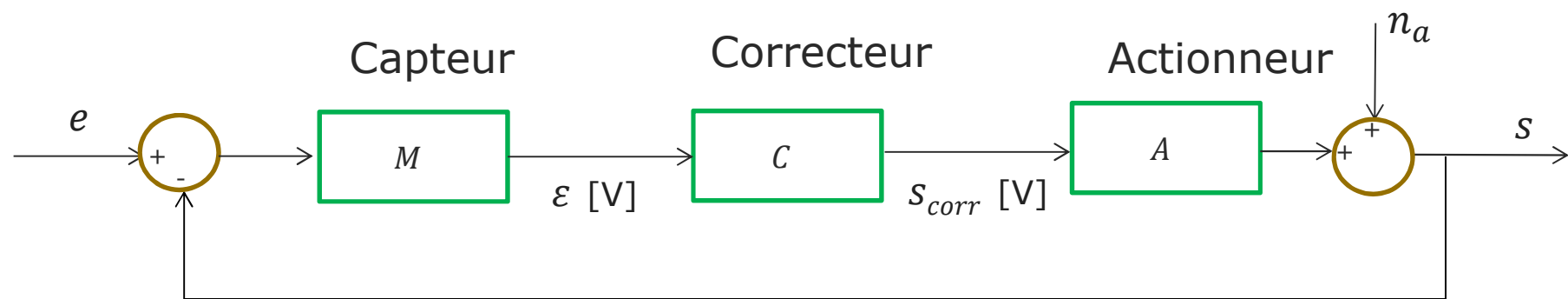
I. Roudas, ... , P. Gallion IEEE PTL 1994

S. Dilwali, Opt. Quant. Eng. 1992

- modulateur de phase



## Boucle fermée



Asservissement en métrologie :

$e(t)$ ,  $n_a(t)$  sont des variables aléatoires indépendantes

+ calcul des signaux pour des signaux déterministes, ou  $ds(f)$

de  $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds(f)e^{i2\pi ft}$  formule de Cramér

→ séparation des effets de  $e(t)$  et  $n_a(t)$

+ Puis addition des variances (des DSP)

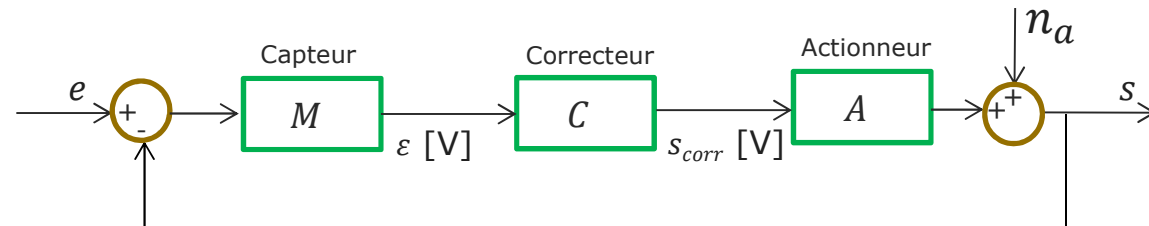
Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) :

$$G_{bo}(f) = M(f)C(f)A(f)$$

Fréquence de gain unité

$$|G_{bo}(f = f_{GU})| = 1$$

## Boucle fermée



Calcul pour des signaux déterministes :

On fait disparaître  $C(f)$  de l'expression des signaux de sortie :

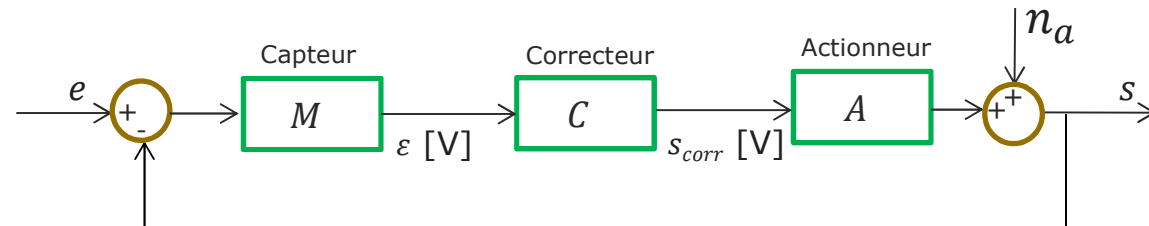
$$\varepsilon(f) = \frac{M(f)}{1+G_{bo}(f)} e(f) - \frac{M(f)}{1+G_{bo}(f)} n_a(f)$$

$$s_{corr}(f) = \frac{1}{A(f)} \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} e(f) - \frac{1}{A(f)} \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} n_a(f)$$

$$s(f) = \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} e(f) + \frac{1}{1+G_{bo}(f)} n_a(f)$$

Dépendance pour des signaux aléatoires :

## Boucle fermée



Dépendance pour des signaux aléatoires :

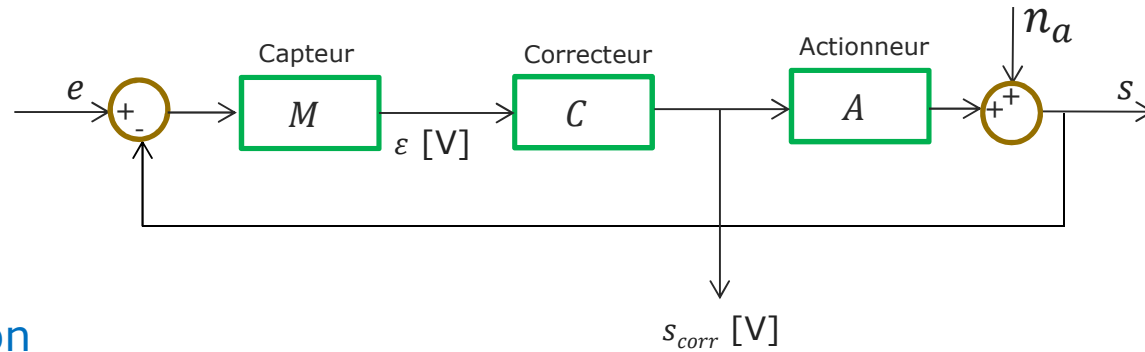
$$S_{\varepsilon}(f) = \left| \frac{M(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_e(f) + \left| \frac{M(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_{n_a}(f)$$

$$S_{corr}(f) = \left| \frac{1}{A(f)} \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_e(f) + \left| \frac{1}{A(f)} \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_{n_a}(f)$$

$$S_s(f) = \left| \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_e(f) + \left| \frac{1}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_{n_a}(f)$$

## Boucle fermée

Mesure de la perturbation



signal de correction

$$S_{corr}(f) = \left| \frac{1}{A(f)} \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_e(f) + \left| \frac{1}{A(f)} \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_{n_a}(f)$$

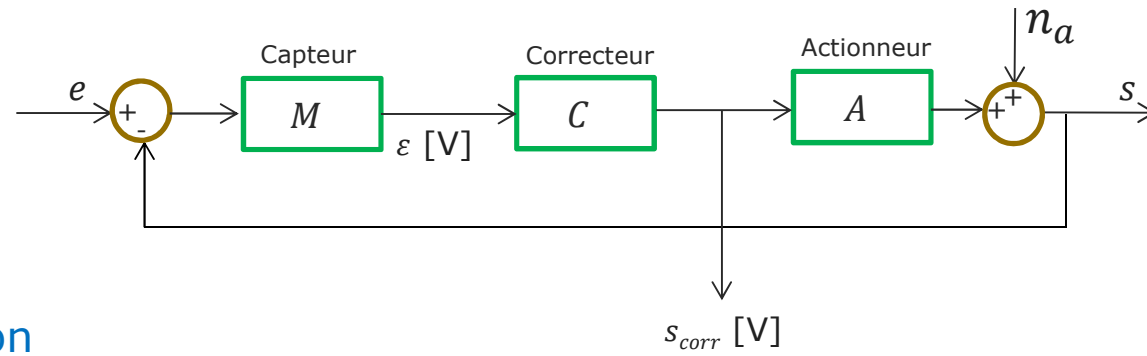
on a en général  $S_e \ll S_{n_a}(f)$

→  $s_{corr}(t)$  est un capteur pour mesurer  $n_a(t)$ , de fonction de transfert  $\frac{1}{A(f)} \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)}$

Soit pour  $f \ll f_{GU}$ , de fonction de transfert  $\frac{1}{A(f)}$

On utilise la boucle d'asservissement pour mesurer à posteriori la perturbation à asservir ... avec un « capteur » plus linéaire !

Boucle fermée  
Capteur de perturbation



signal de correction

$$S_{corr}(f) = \left| \frac{1}{A(f)} \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_e(f) + \left| \frac{1}{A(f)} \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_{n_a}(f)$$

→  $s_{corr}(t)$  capteur de  $n_a(f)$ , fonction de transfert  $\frac{1}{A(f)} \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)}$

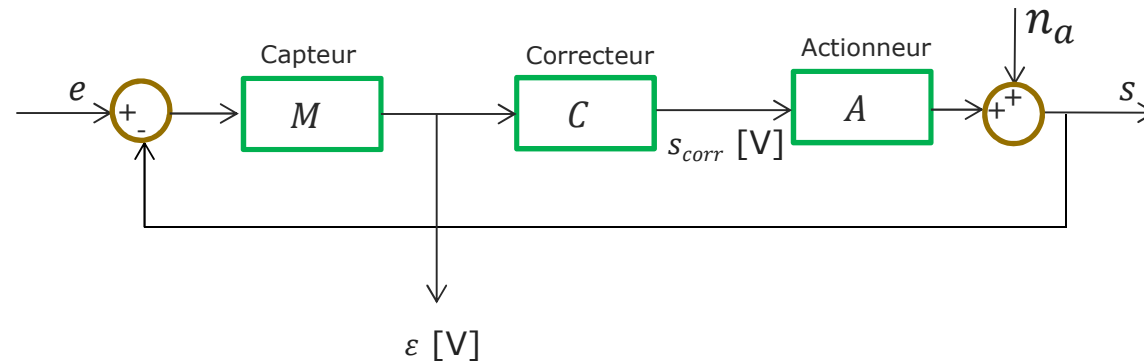
Sensibilité :  $\frac{1}{A(f=0)}$

Bruit ramené à l'entrée :  $S_e(f)$

N.B. indépendant du correcteur

## Boucle fermée

Mesure de la perturbation



signal d'erreur

$$S_{\varepsilon}(f) = \left| \frac{M(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_e(f) + \left| \frac{M(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_{n_a}(f)$$

on a en général  $S_e(f) \ll S_{n_a}(f)$ 

→  $\varepsilon(t)$  est un capteur pour mesurer  $n_a(t)$ , de fonction de transfert  $M(f) \frac{1}{1+G_{bo}(f)}$

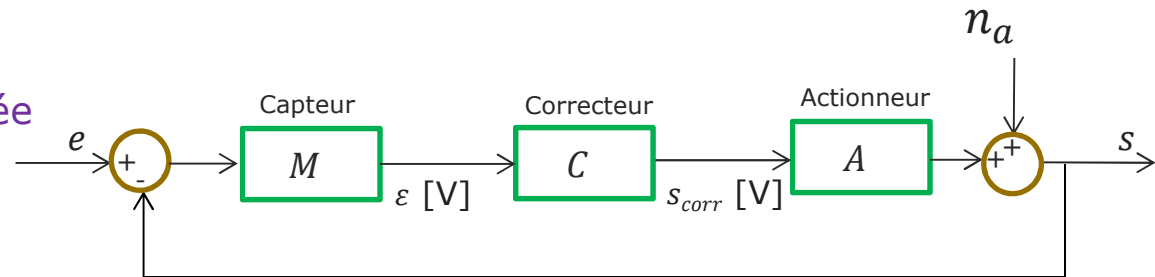
Soit pour  $f \gg f_{GU}$ , de fonction de transfert  $M(f)$

On utilise la boucle d'asservissement  
pour mesurer à posteriori la perturbation à asservir  
... avec un « capteur » plus linéaire !  
N.B. indépendant du correcteur

(ondes gravitationnelles, mesure de bruit de phase,...)

## Boucle fermée

Performance de la boucle fermée



Dépendance pour des signaux aléatoires, signal de sortie

$$S_s(f) = \left| \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_e(f) + \left| \frac{1}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_{n_a}(f)$$

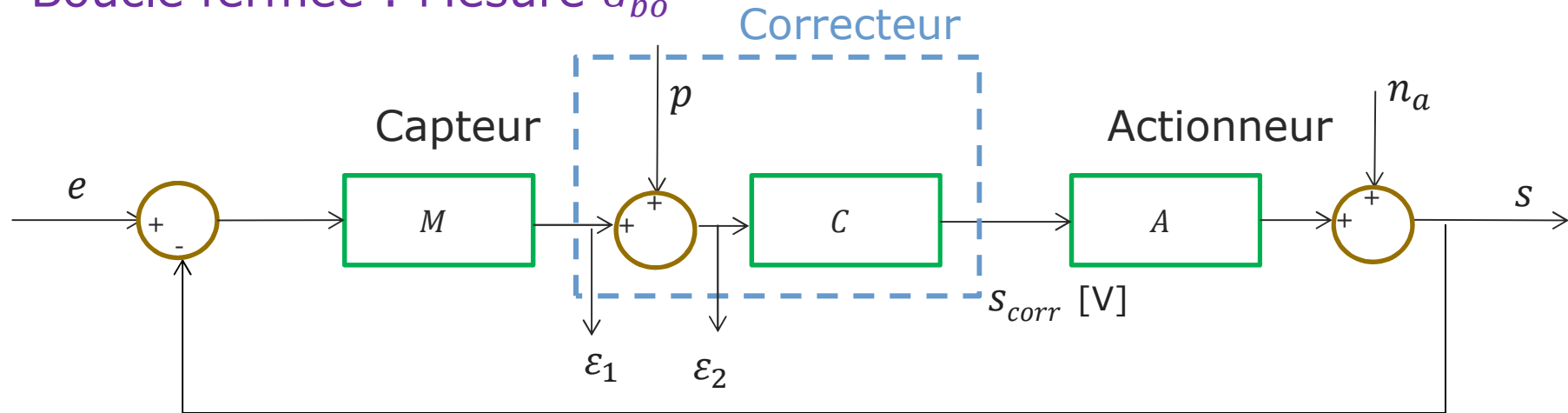
La DSP de bruit du laser stabilisé (amplitude, fréquence)

est réduite du facteur  $\left| \frac{1}{1+G_{bo}(f)} \right|^2$

Et est fidèle à la référence à la référence si  $\left| \frac{1}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_{n_a}(f) \ll \left| \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 S_e(f)$

sauf biais de mesures : effets non modélisés ! (toujours...)

→ Mesure hors boucle (« out of loop ») indispensable, avec si possible des biais indépendants statistiquement

Boucle fermée : Mesure  $G_{bo}$ Équations pour  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  :

$$\varepsilon_1 = -\frac{G_{bo}}{1 + G_{bo}} p + \dots$$

$$\varepsilon_2 = +\frac{1}{1 + G_{bo}} p + \dots$$

Masaki Ando 1995 (non publié)

$$\rightarrow \text{Si } p \gg \dots \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -G_{bo}$$

avec un analyseur vectoriel de réseau

Vérification : la phase n'est pas aléatoire

! Excursion du capteur dans la zone de linéarité

+ Mesure des effets fins non prévus initialement dans  $G_{bo}$   
résonances fines, retards purs,...

+ Vérification des calibrations de  $M(f)$  et  $A(f)$

→ Optimisation du correcteur  $C(f)$



1. Pôles à partie réelle positive
2. Bode
3. Black-Nichols
4. Nyquist

Système (capteur, actionneur, correcteur) :

Équations différentielles à coefficients constants, sans retard

→ Transformée de Laplace = fraction rationnelle de  $p$   
calcul opérationnel...  
( $s$  monde anglo-saxon)

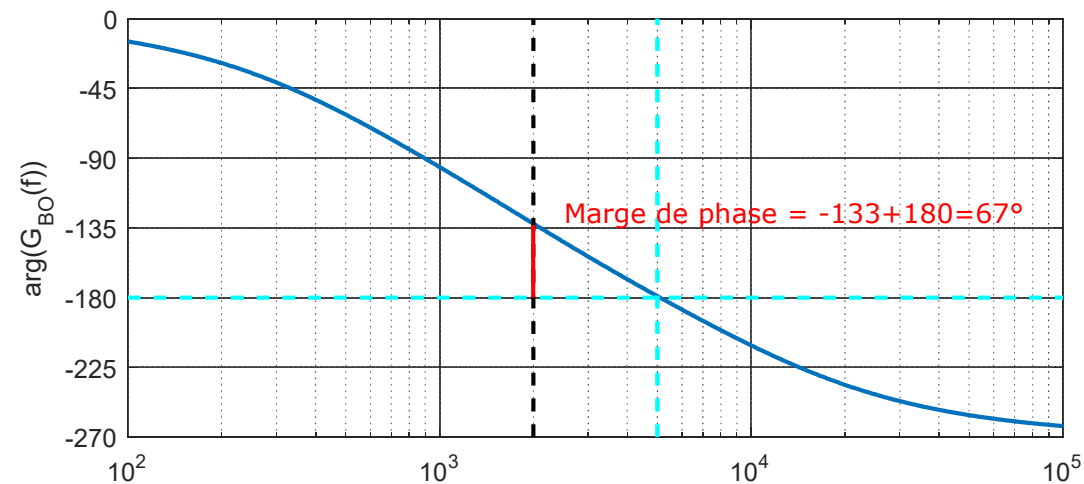
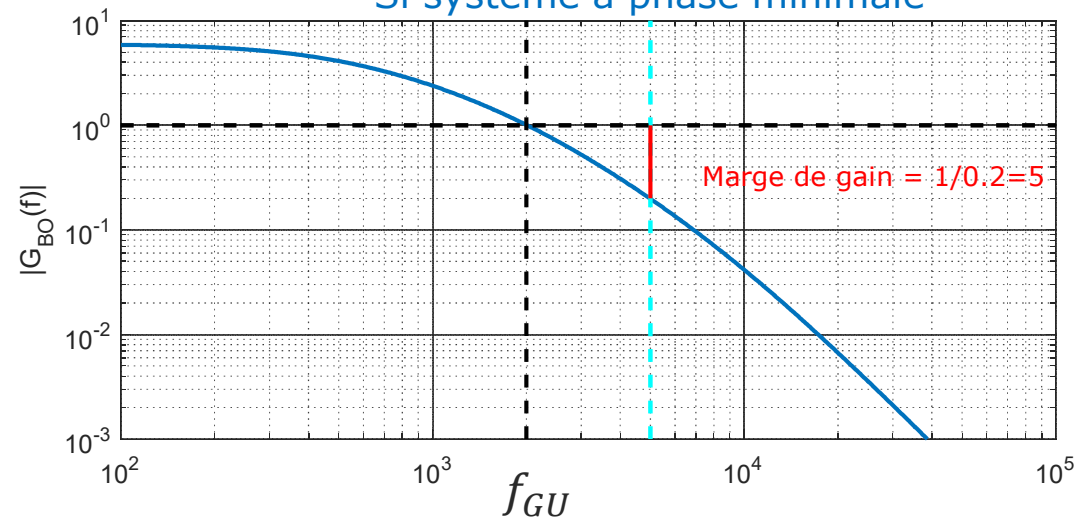
→ stabilité  $\Leftrightarrow$  pas de pôle (=racine du dénominateur de la T.Laplace)  
à partie réelle positive dans la FTBO

→ « lieu des racines » (root locus)  
**mais pas de marges...**

1. Pôles à partie réelle positive
2. Bode
3. Black-Nichols
4. Nyquist

FTBO :

- Si courbe du module croise 1 ou 2 fois le gain unité
- Si système à phase minimale

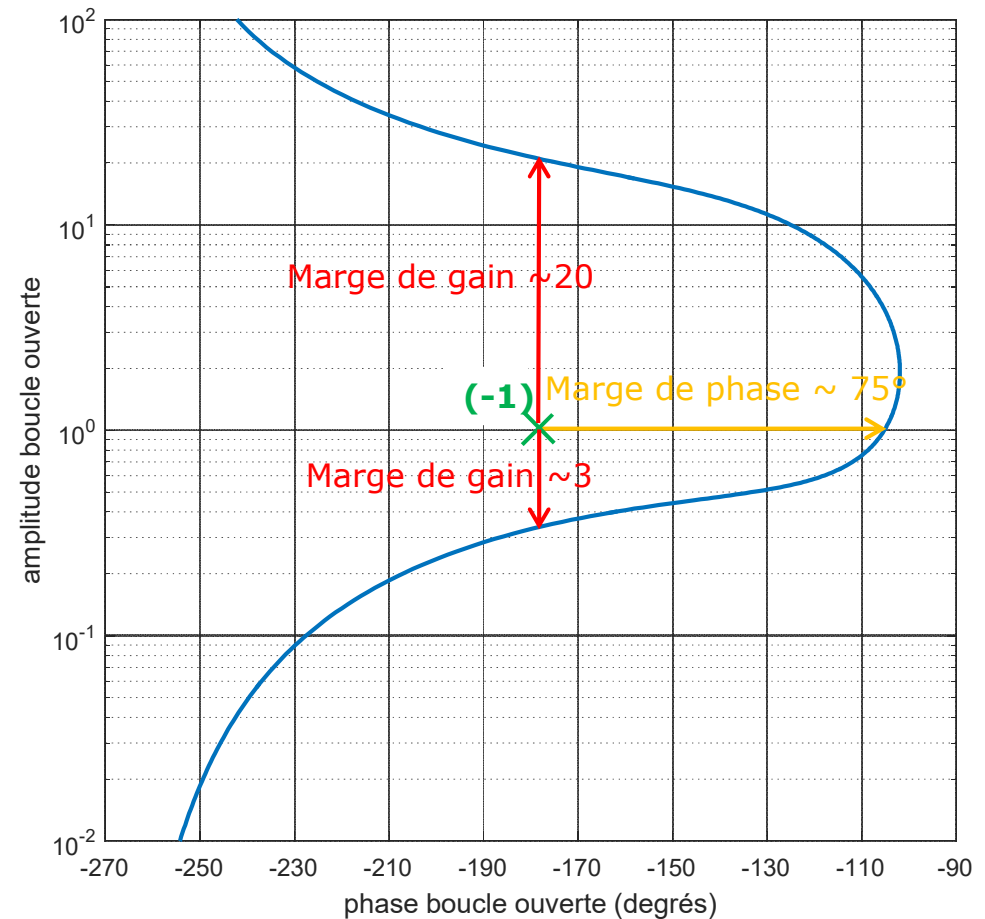




1. Pôles à partie réelle positive
2. Bode
3. Black-Nichols
4. Nyquist

Cas stabilité conditionnelle :

Changement de gain :  
Translation verticale de la courbe



1. Pôles à partie réelle positive
2. Bode
3. Black-Nichols
4. Nyquist

Surtension :

Amplitude et fréquence dépendent de la source de bruit !

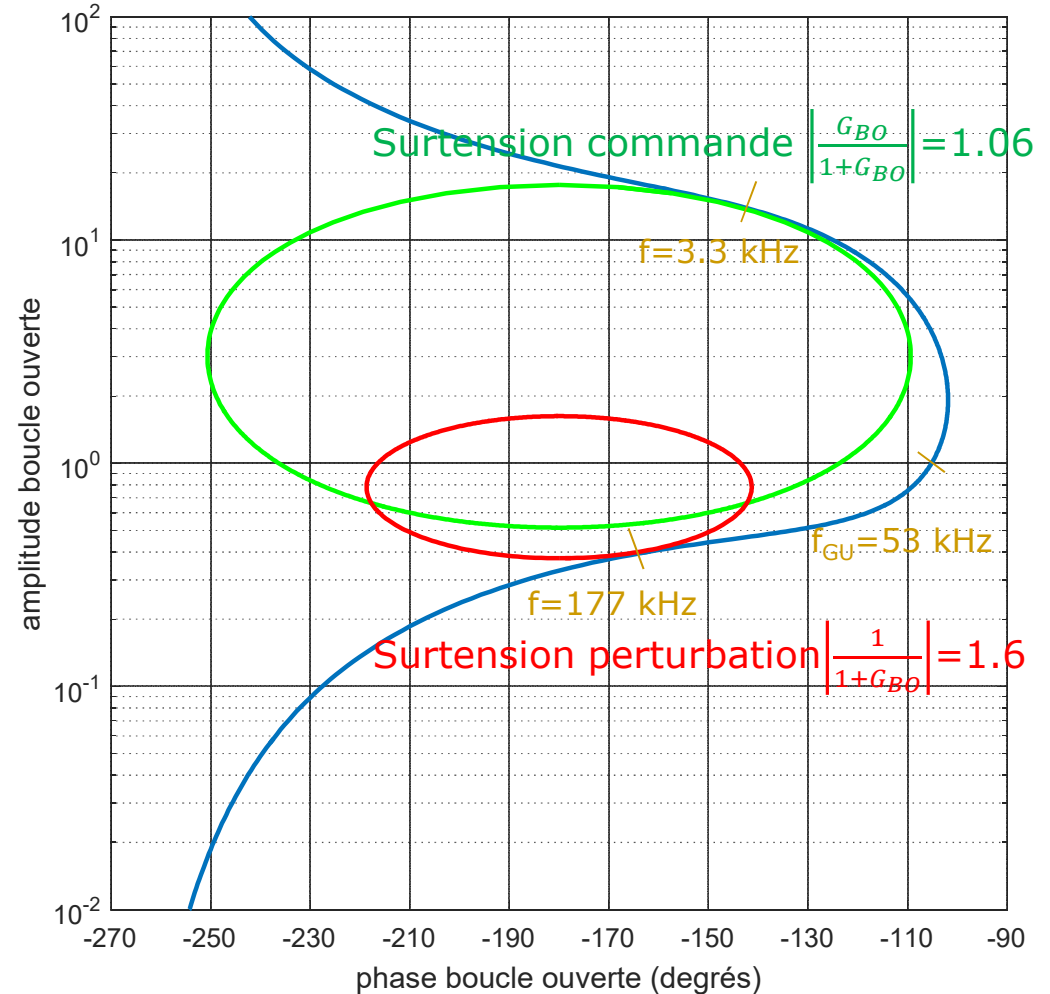
→ spectre de bruit insuffisant  
Pour déterminer  $f_{GU}$

Attention :  
abaque de Nichols : surtension de commande  
⇨ en métrologie, mesure plus probable  
de surtension de perturbation

Attention :  
La fréquence de surtension n'est pas la  $f_{GU}$



## Surtensions en boucle fermée



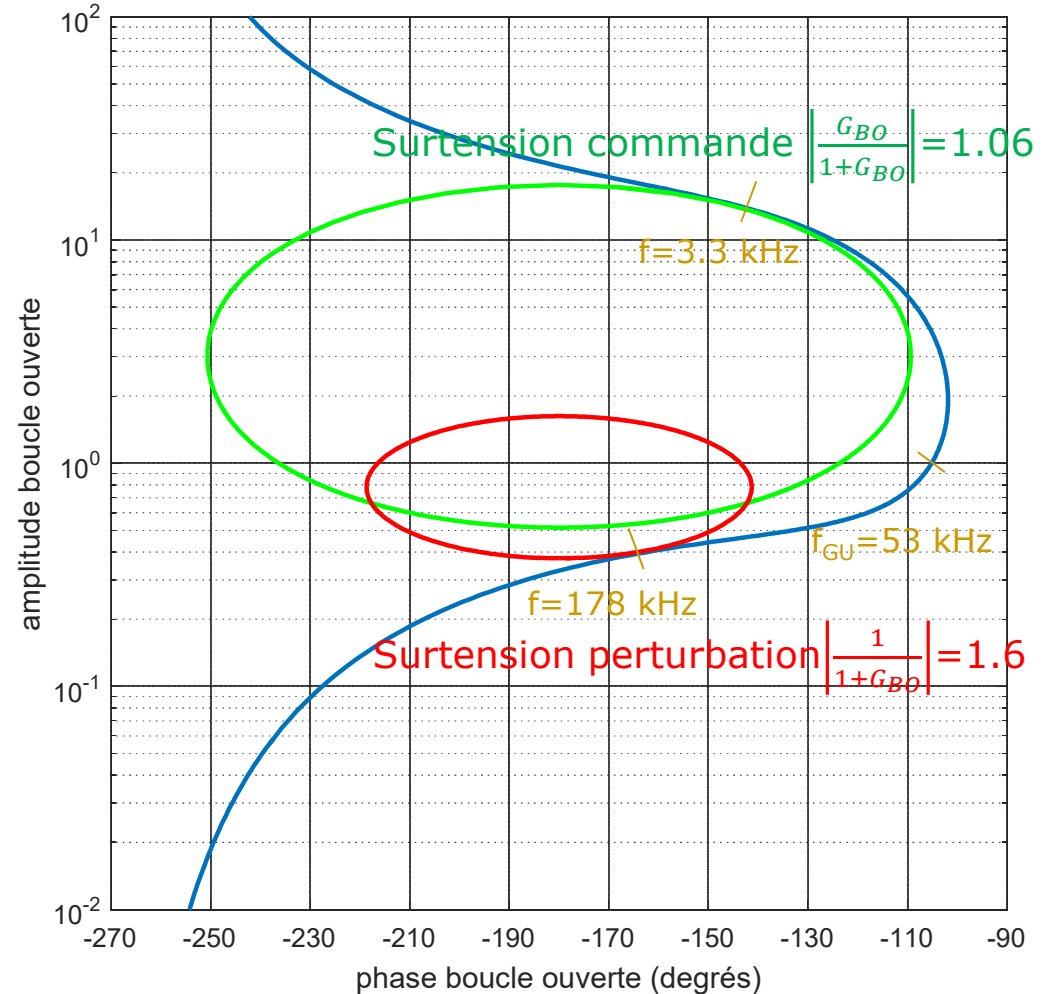
1. Pôles à partie réelle positive
2. Bode
3. Black-Nichols
4. Nyquist

Marge de phase 30°  
ou marge de gain 2 ?

Marge de module = 2 !

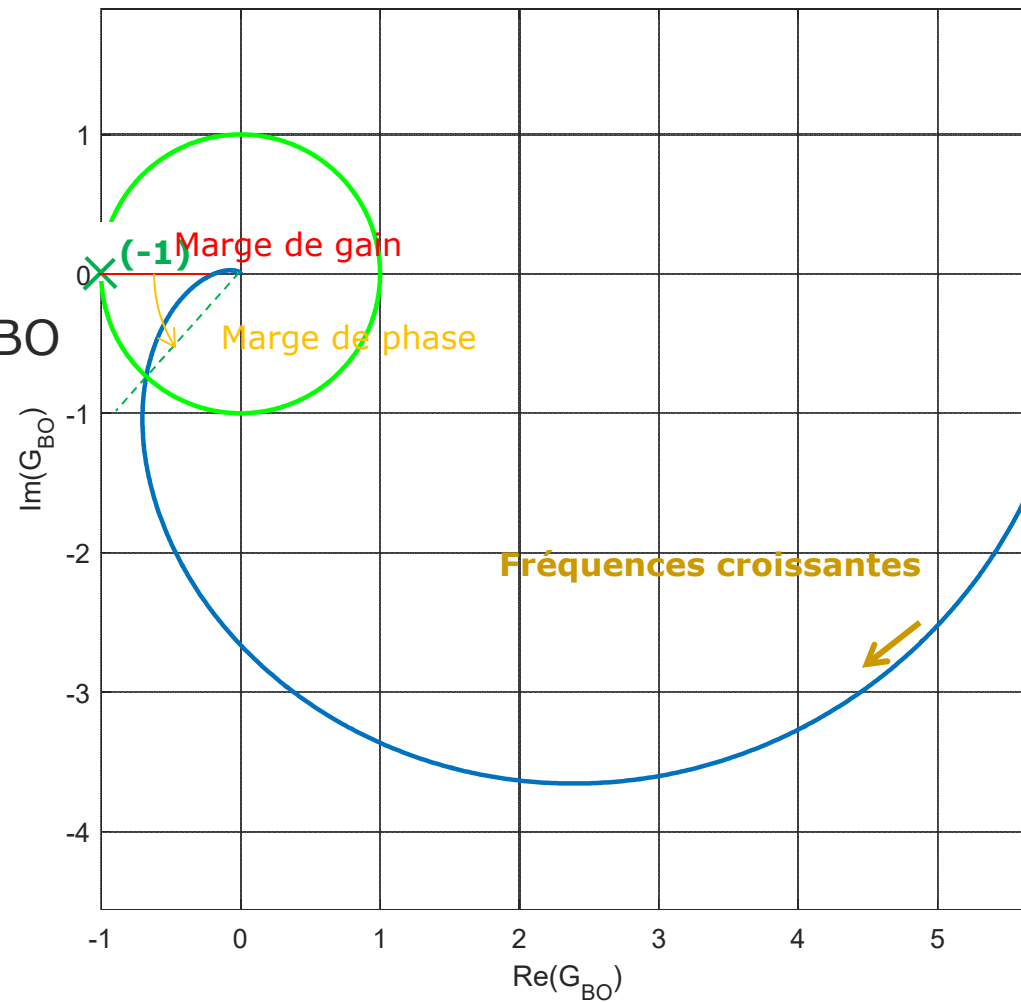
- Légère variation des paramètres de la boucle (puissance optique, température, ...)
- Surtension boucle fermée : pas de saturation électronique de  $s_{corr}$

## Surtensions en boucle fermée



1. Pôles à partie réelle positive
2. Bode
3. Black-Nichols
4. Nyquist

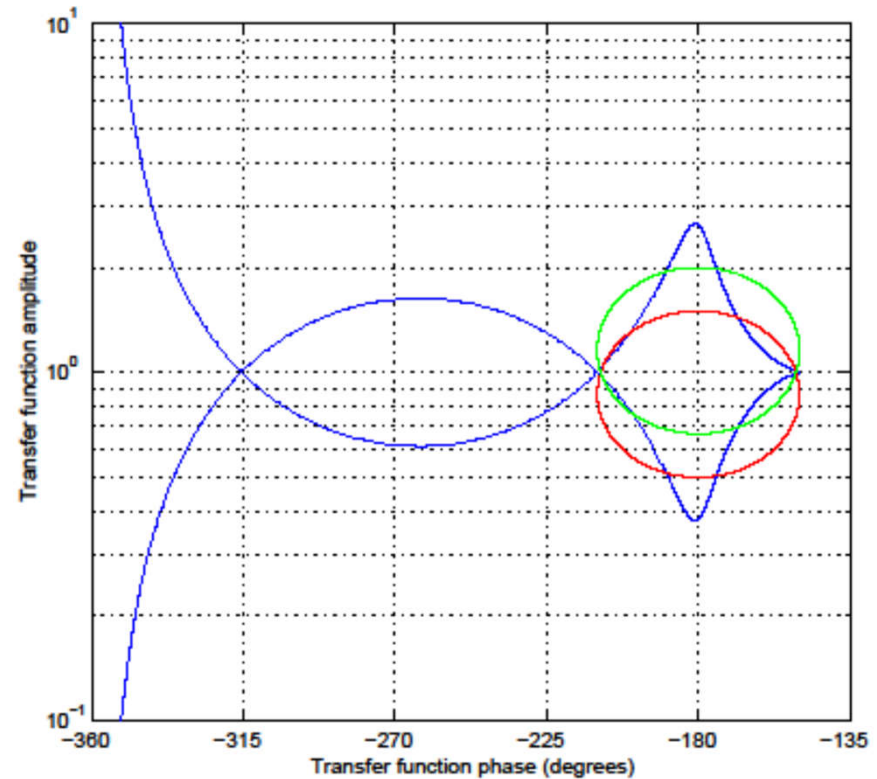
Indispensable  
si pôle(s) à partie réelle en BO



1. Pôles à partie réelle positive
2. Bode
3. Black-Nichols
4. Nyquist

Marge de phase et gain OK  
 Marge de module (surtension) mauvaise !

Vrai critère  
 => Marge de module



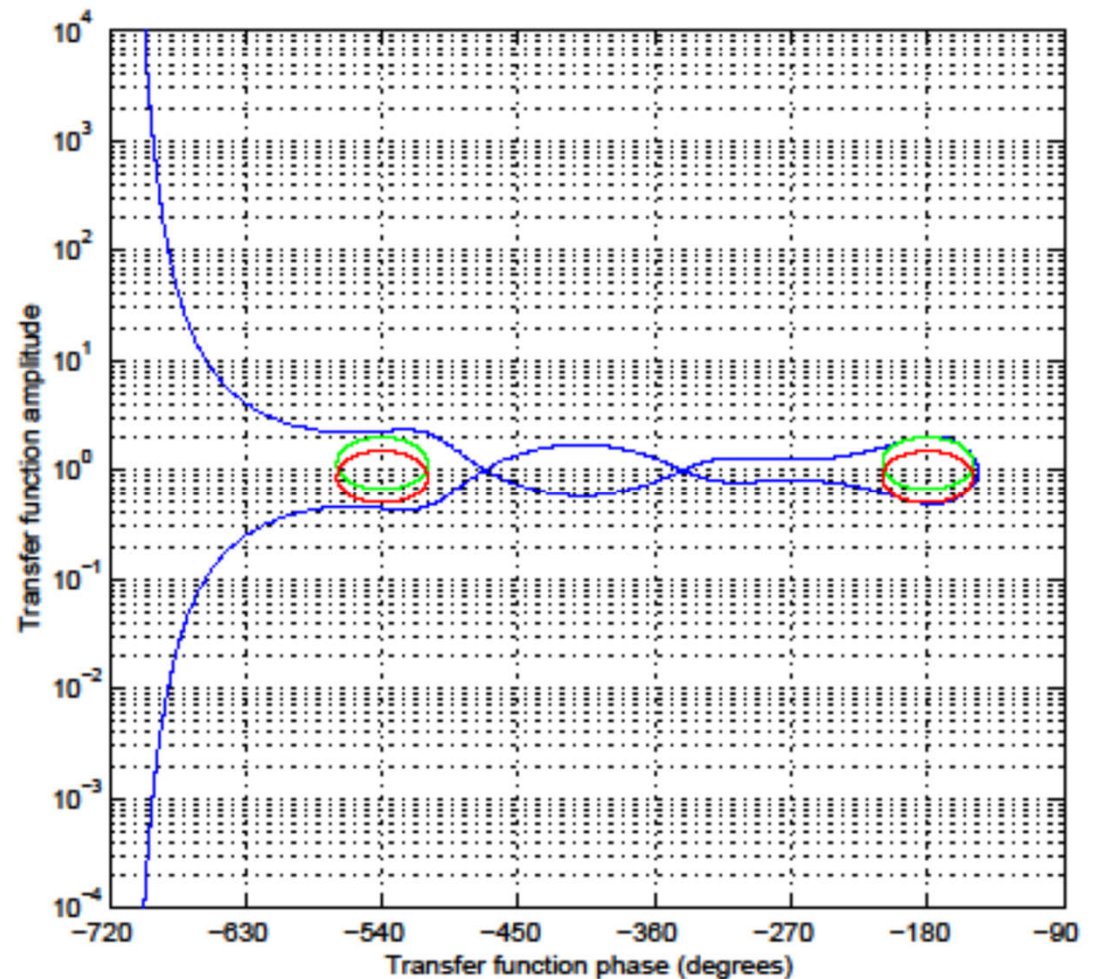
zéros		pôles	
fréquence	Q	fréquence	Q
1.738	100	0.5651	18.65
0.1449	1.516	0.1749	15.16
0.04483	18.65	0.0146	100
		0.0001	100



1. Pôles à partie réelle positive
2. Bode
3. Black-Nichols
4. Nyquist

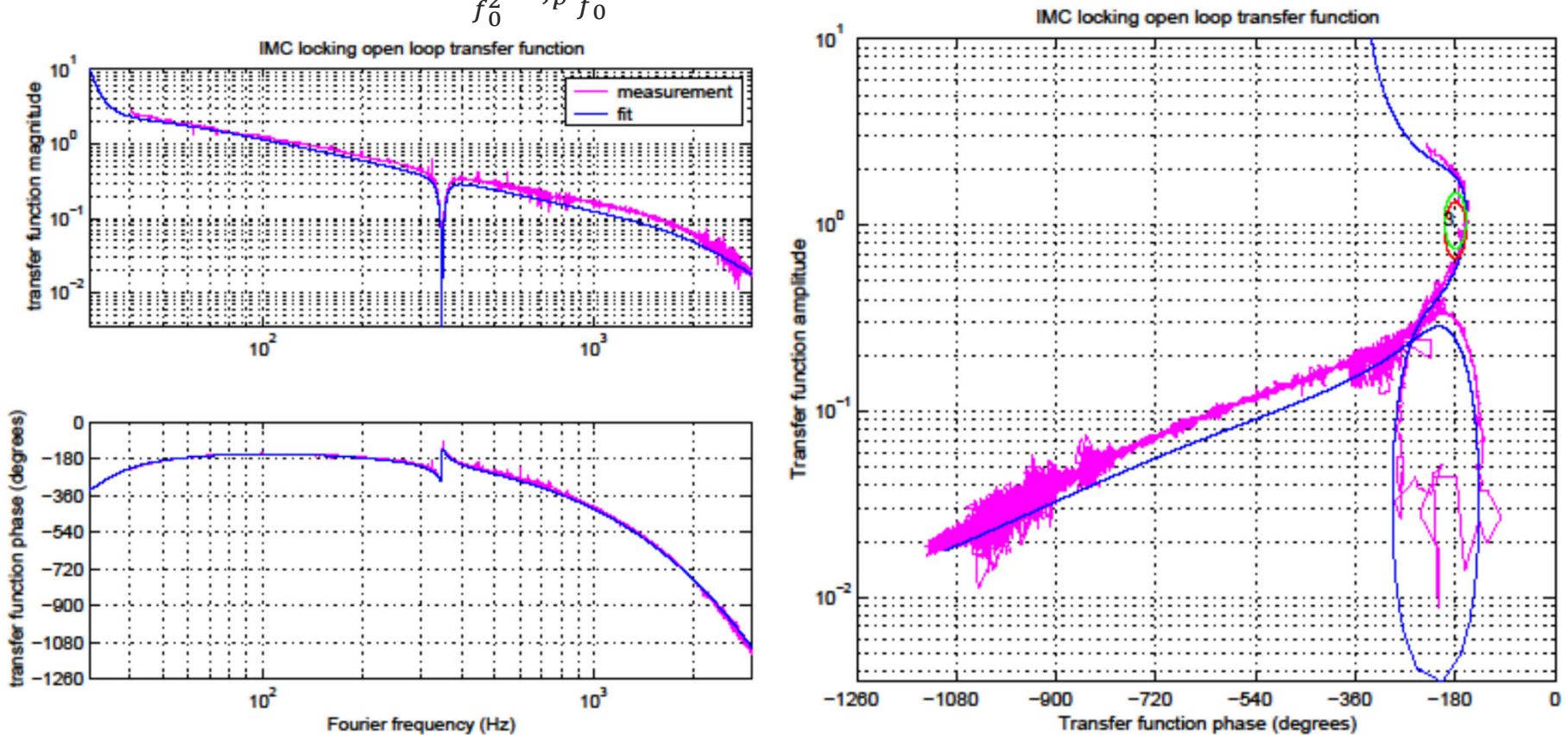
Vrai critère  
⇒ Marge de module

Il y a plusieurs points « -1 » !  
 $-1 = e^{-i(1+2k)\pi}, k \in \mathbb{Z}$



Effet d'une paire pôle-zéro (degré de liberté auxiliaire)

$$FTBO = A. \frac{1 - \frac{f^2}{f_0^2} + i\zeta_z \frac{f}{f_0}}{1 - \frac{f^2}{f_0^2} + i\zeta_p \frac{f}{f_0}} \quad \text{avec } \zeta_z < \zeta_p$$



Attention aux effets fins dans les fonctions de transfert !  
 Ex. ISL,  $\pm f_{mod}$ ,  $\pm f_{TEM01}$ , ... pour le signal PDH

## Description d'une boucle d'asservissement en métrologie

éléments : capteur (sensibilité, bruit lecture, bruit référence), actionneur, correcteur,  
équations de boucle  
performance en boucle fermée  
mesures en boucle fermée  
critères de stabilité

## Conception d'un asservissement

Intégrateurs multiples  
Boucles imbriquées  
Résonances mécaniques  
Retard pur

## Simulation

## Compléments sur les asservissements de fréquence

peigne : 2 degrés de liberté, feedback vs. feedforward  
linéarité du PDH et choix de la finesse

sortie stabilisée:

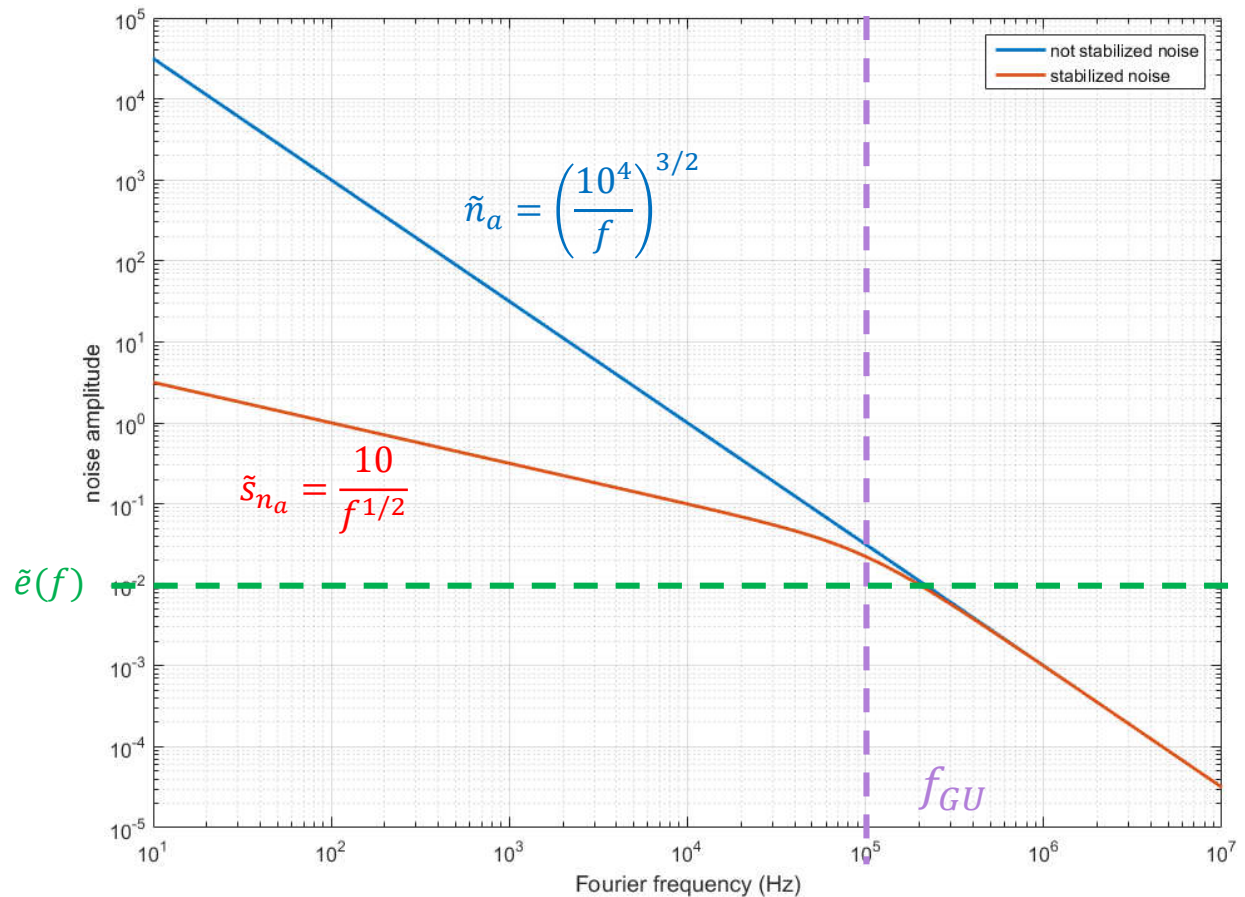
$$S_s(f) = \left| \frac{G_{bo}(f)}{1 + G_{bo}(f)} \right|^2 S_e(f) + \left| \frac{1}{1 + G_{bo}(f)} \right|^2 S_{n_a}(f)$$

Si  $\tilde{n}_a(f) \propto f^\alpha$ , et  $|G_{bo}(f)| \propto f^\beta$ ,

alors pour  $f \ll f_{GU}$ ,

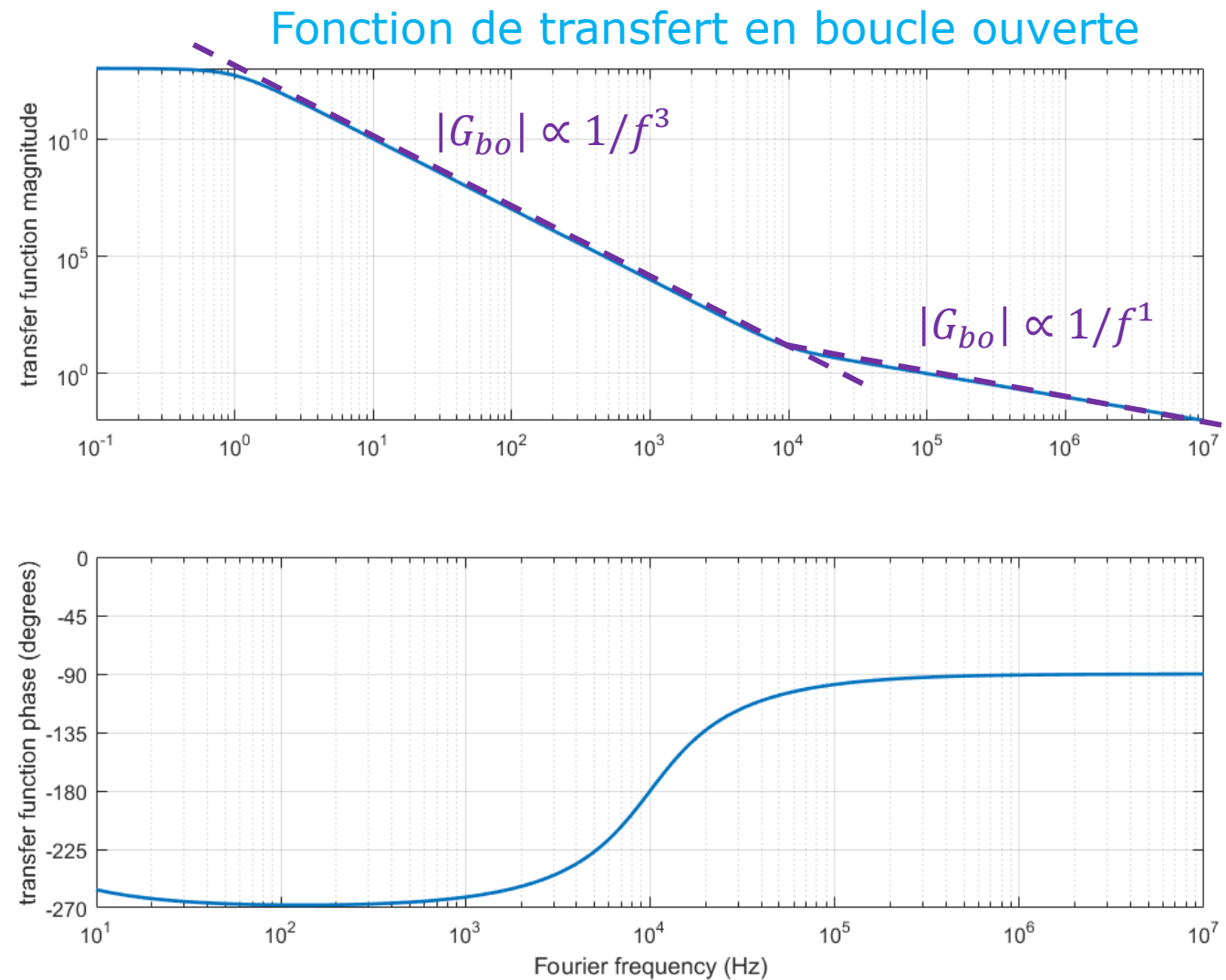
$$\tilde{s}_{n_a} = \frac{\tilde{n}_a(f)}{|G_{bo}(f)|} \propto f^{\alpha-\beta}$$

$$G_{bo} = \frac{10^5}{if} \text{ soit } f_{GU} = 100 \text{ kHz}$$



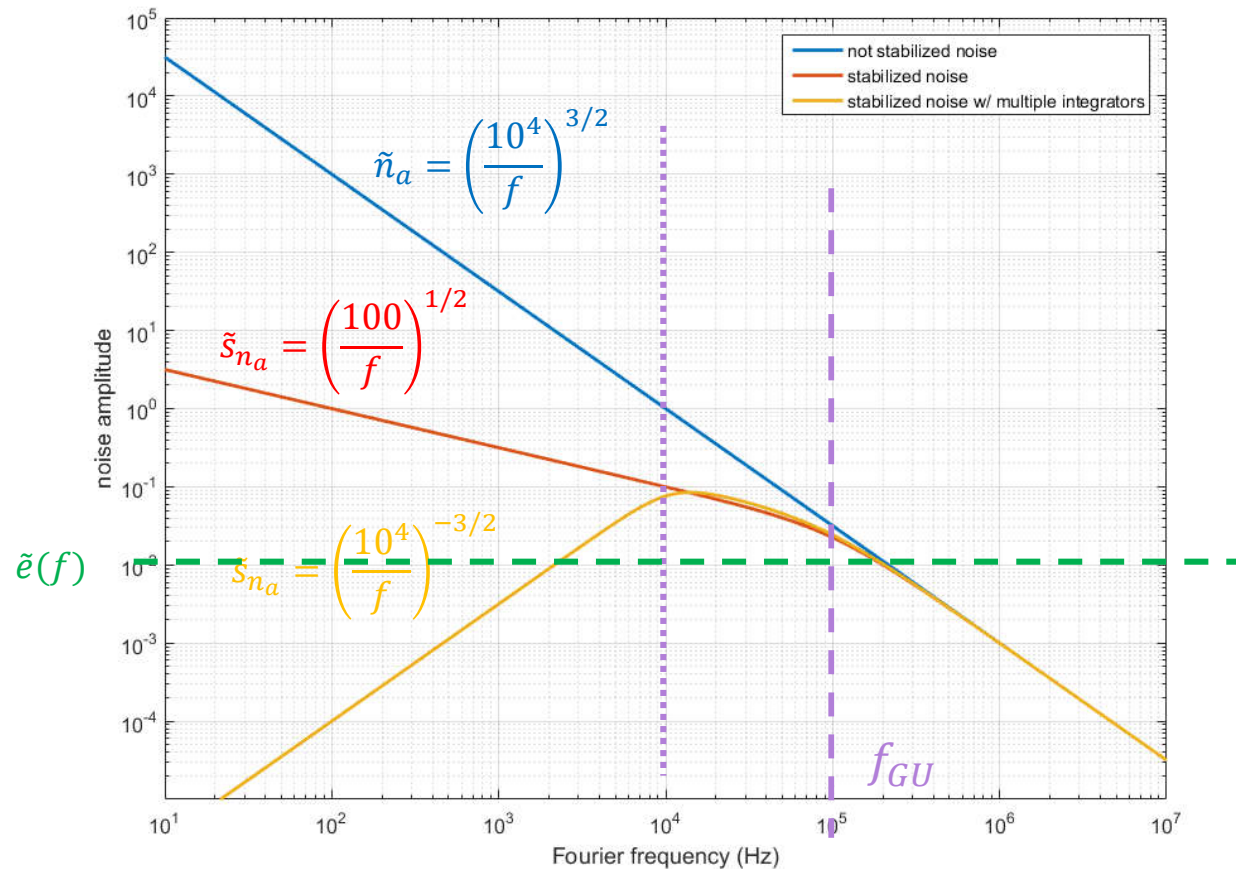
On définit des intégrateurs multiples,  
pour les fréquences  $f < f_{GU}/10$

Exemple :



sortie stabilisée:  $\tilde{s}^2(f) = \left| \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 \tilde{e}^2(f) + \left| \frac{1}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 \tilde{n}_a^2(f)$

Pour  $f \ll f_{GU}$ ,  $\tilde{s}_{n_a} = \frac{\tilde{n}_a(f)}{|G_{bo}(f)|}$  ; on souhaite  $\frac{\tilde{n}_a(f)}{|G_{bo}(f)|} \ll \tilde{e}(f)$  pour garantir la fidélité



$$\text{sortie stabilisée: } \tilde{s}^2(f) = \left| \frac{G_{bo}(f)}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 \tilde{e}^2(f) + \left| \frac{1}{1+G_{bo}(f)} \right|^2 \tilde{n}_a^2(f)$$

Pour  $f \ll f_{GU}$ ,  $\tilde{s}_{n_a} = \frac{\tilde{n}_a(f)}{|G_{bo}(f)|}$  ; on souhaite  $\frac{\tilde{n}_a(f)}{|G_{bo}(f)|} \ll \tilde{e}(f)$  pour garantir la fidélité

Des « intégrateurs multiples » sont **INDISPENSABLES**

pour profiter d'une bonne référence

- \* coûteuse
- \* beaucoup de temps de développement

Malheureusement peu commercial (compatible avec boucles imbriquées)

- Vescent (PI<sup>2</sup>), Sisyph (PI<sup>3</sup>)
- cascade d'éléments commerciaux
- développement « maison »

## Ex. stabilisation de fréquence

→ modulation de la longueur de cavité du laser

- \* bande passante limitée par la résonance d'un piezo (qq kHz)
- \* réponse MHz/V

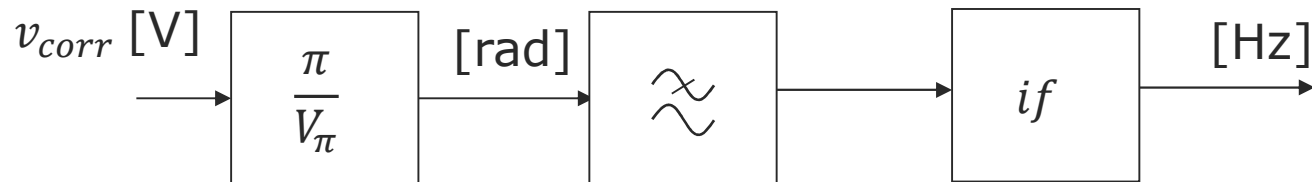
→ modulateur de phase

- \* bande passante qq MHz (GHz)
- \*  $V_\pi \sim$  qq V

Modulateur de phase comme actionneur de fréquence :

$\sin(\Phi(t))$  avec  $\Phi = 2\pi\nu_0 t + \phi(t)$

$$\text{Donc } \nu_{inst}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} \quad \rightarrow \quad \nu_{inst}(f) = if\phi(f)$$



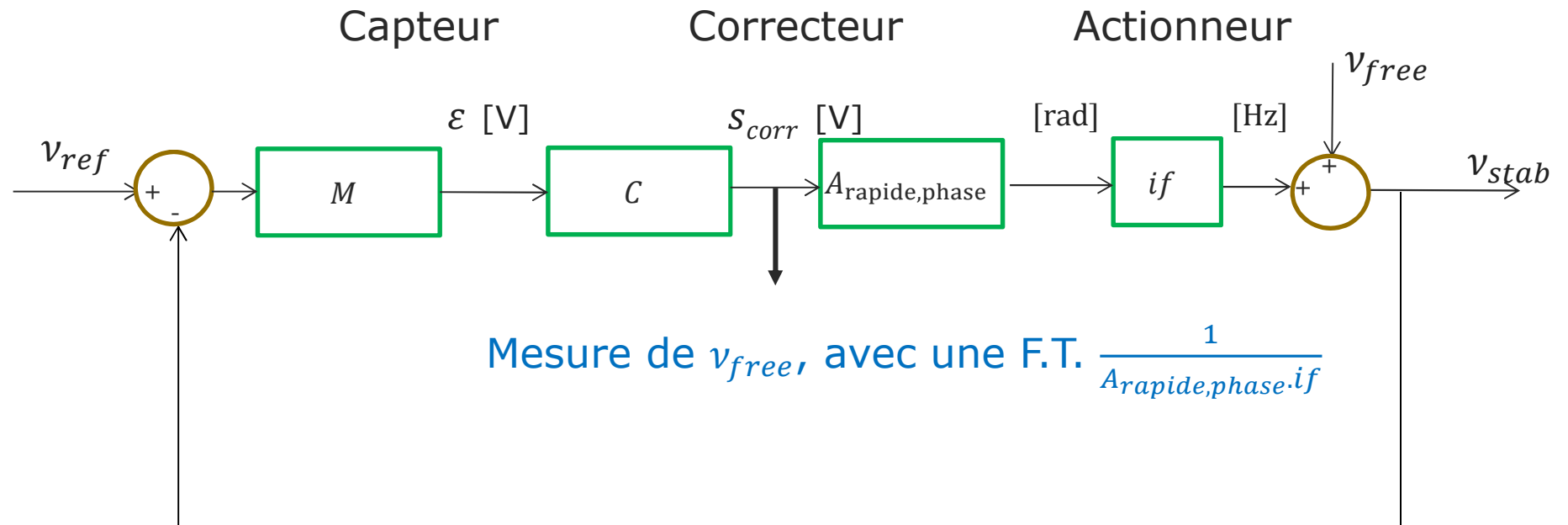


- Partage du signal d'erreur (ou de correction) par des filtres passe-haut et passe-bas :
  - Peu de gain à la fréquence de partage
  - Stabilité à voir

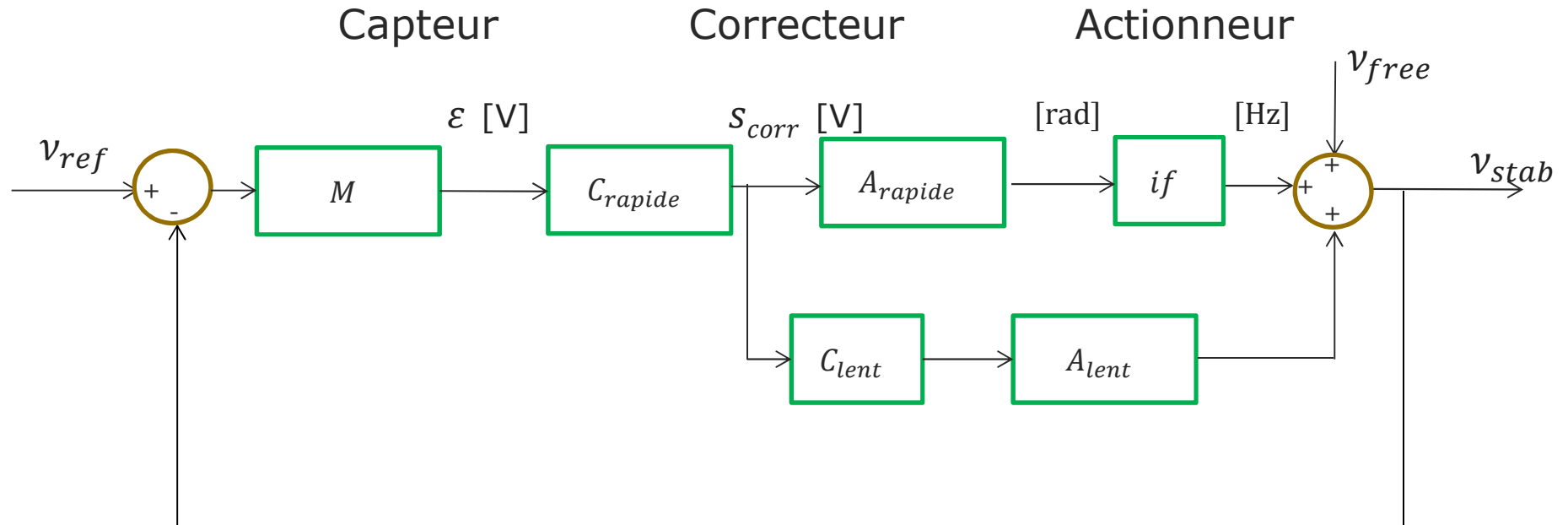
→ Boucles imbriquées

Ex. stabilisation de fréquence avec un modulateur de phase

Ex. stabilisation de fréquence avec un modulateur de phase



Ex. stabilisation de fréquence avec un modulateur de phase



Fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G_{bo} = G_{bo,rapide}(1 + G_{bo,lent})$$

avec

$$G_{bo,rapide} = S C_{rapide} A_{rapide,phase} \cdot if$$

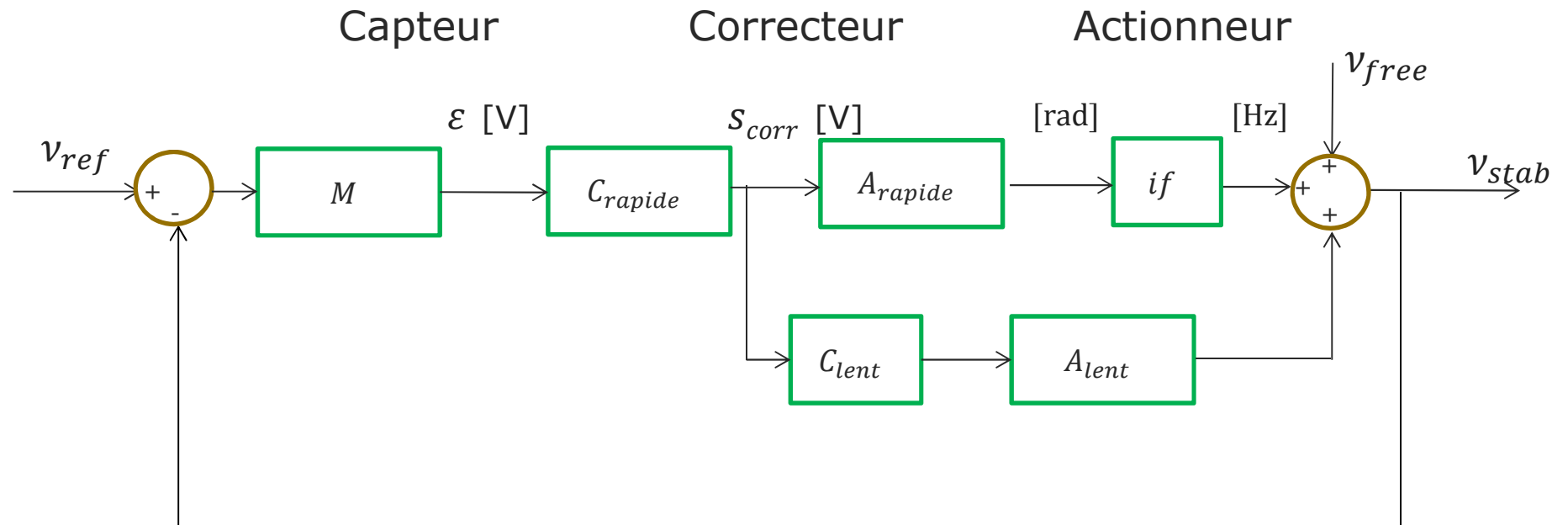
et

$$G_{bo,lent} = \frac{1}{A_{rapide,phase} \cdot if} \cdot C_{lent} \cdot A_{lent}$$

On choisit

$$f_{GU,lent} \approx f_{GU,rapide}/10$$

Ex. stabilisation de fréquence avec un modulateur de phase



$$S_{lent} = \frac{1}{A_{rapide,phase} \cdot if} :$$

Indépendant des intégrateurs multiples de la boucle rapide !!