

Journée “Bruit femto”

Fondements du bruit

Yann Le Coq

LNE-SYRTE (Observatoire de Paris)

(CNRS/PSL Université Paris/Sorbonne Université)

yann.lecoq@obspm.fr

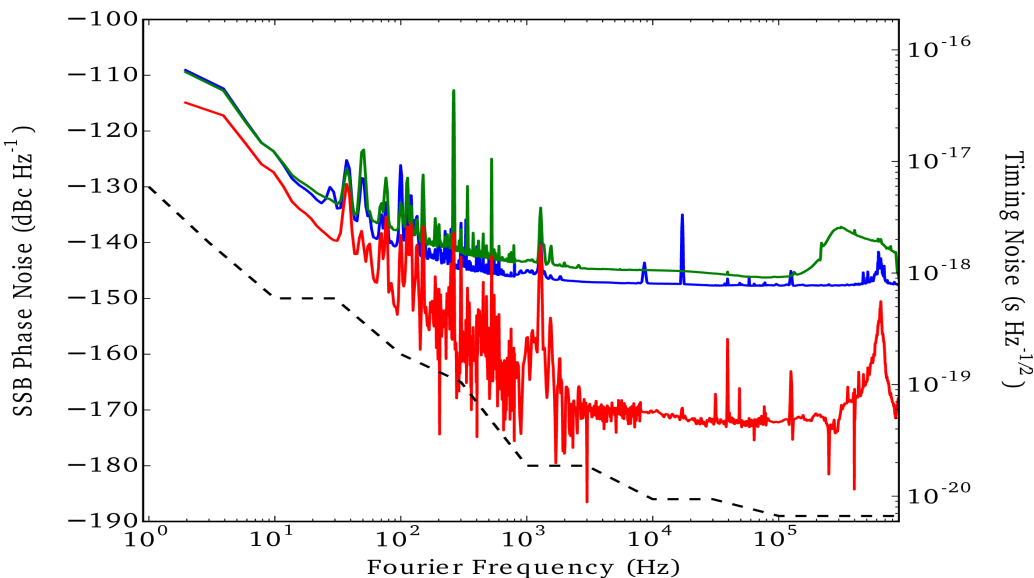
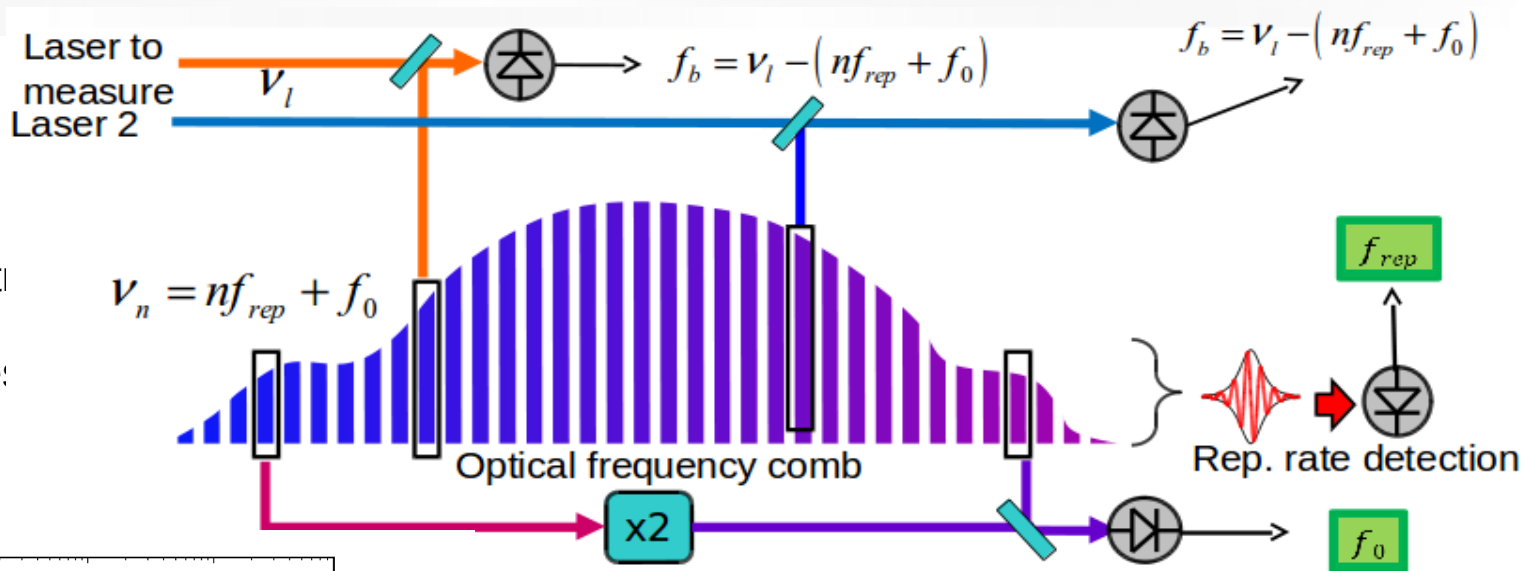


Systemes de Référence Temps-Espace



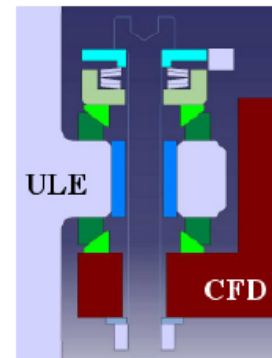
Le genre de trucs que je fais...

Peignes de fréquences optiques (laser femto) pour comparer des horloges (optiques ou micro-onde) entières et transférer les performances entre gammes spectrales différentes



Génération (et caractérisation) de signaux micro-ondes à très bas bruit de phase à l'aide de lasers femtosecondes

Réalisation de lasers ultra-stables et à très bas bruit de phase



Concepts généraux et traitement du signal

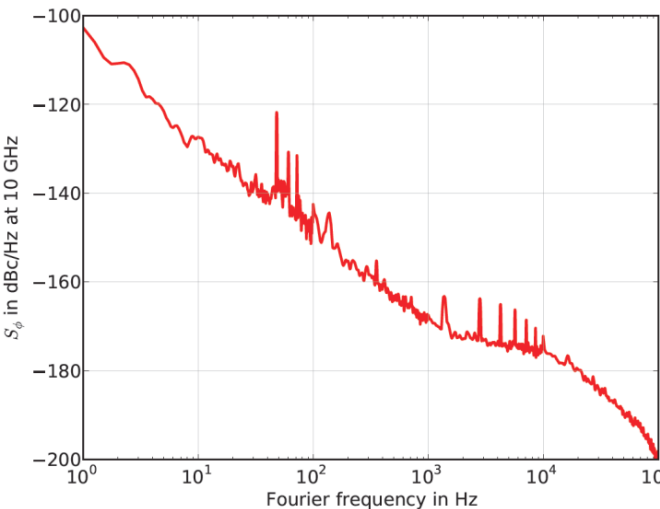
Boîte à outils de la mesure de précision

On dispose d'un signal bruité : $s(t) = s_0 + x(t)$

Trois concepts de base sont utilisés pour caractériser ce signal:

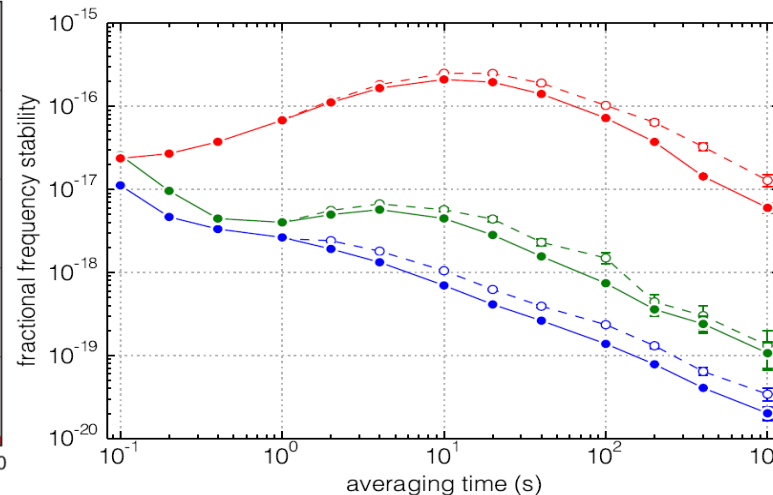
Densité Spectrale de
Puissance de bruit : $S_x(f)$

= fluctuations typiques de $s(t)$
à la fréq. de Fourier caractéristiques f



Stabilité du signal : $\sigma_x(\tau)$

= fluctuations typiques de $s(t)$
sur le temps caractéristique τ



Exactitude

= A quel point est on certain que
< $s(t)$ > converge bien vers ce que l'on
souhaite i.e. s_0

→ Evaluation des erreurs
systématiques venues de différents
paramètres (tout ce à quoi on peut
penser... et plus encore)
→ NB: une bonne stabilité facilite
grandement de telles évaluations !

La Densité Spectrale de Puissance de bruit (DSP)

Si $x(t)$ est une grandeur physique aléatoire, d'unité [unité]

On définit $x_T(t) \triangleq \begin{cases} x(t) & \text{pour } |t| \leq T \\ 0 & \text{pour } |t| > T \end{cases}$ (fonction tronquée, à support borné, donc TF existe...)

La DSP de x est: $S_x(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} [|X_T(f)|^2]}{2T}$ Exprimée en [unit².Hz⁻¹]

NOTE:

alternativement, on peut aussi définir la DSP par :

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau$$

avec $R_{xx}(\tau) \triangleq \mathbb{E} [x(t) \cdot x(t + \tau)]$ La fonction d'autocorrélation de x
(d'après le théorème de Wiener-Khintchine, ces deux définitions sont équivalentes)

Pour $x(t)$ réel, $S_x(f)$ est une fonction paire, donc sans perte d'information, on utilise la DSP unilatérale $S_x^{\text{OS}}(f) = S_x(f) + S_x(-f) = 2S_x(f)$ pour $f > 0$ et $S_x^{\text{OS}}(0) = S_x(0)$

C'est cette dernière quantité qui est le plus normalement utilisée (ex.: analyseur FFT) !

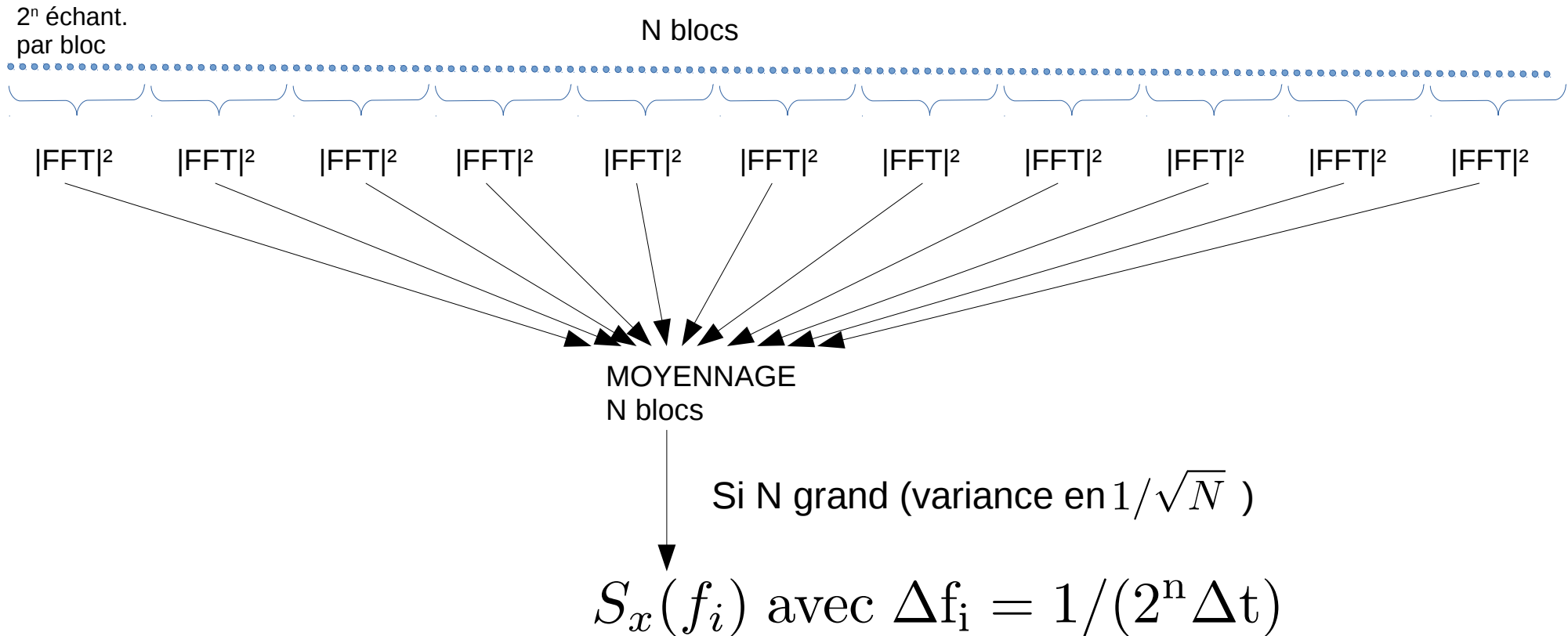
Propriétés :

$$S_{\alpha x} = \alpha^2 S_x \quad S_{dx/dt}(f) = f^2 S_x(f) \quad S_{x_1+x_2} = S_{x_1} + S_{x_2} \quad \text{Pour } x_1, x_2 \text{ indép.}$$

Un estimateur de la DSP : périodogramme moyenné

(~méthode de Welch)

Si $x(t)$ est une grandeur physique aléatoire, échantillonnée en x_n tous les Δt en utilisant l'**hypothèse ergodique** et la **stationnarité** du processus de bruit :



Notes :

- préférable d'appliquer un fenetrage apodisé (ex.: Hanning) avant FFT pour limiter problèmes liés au repliements de spectre
- si fenetrage, on peut faire du recouvrement entre blocs (Welsh)

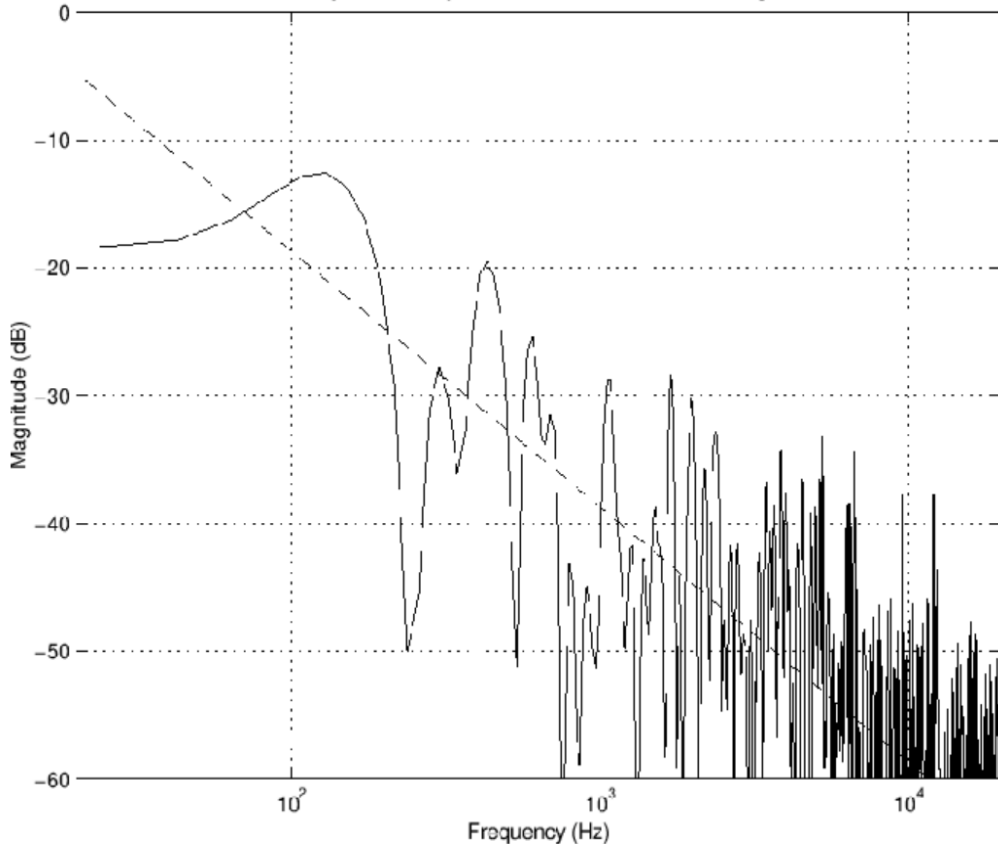
Très bien pour représentation log-lin ou lin-lin,

MAIS pas très pratique si représentation log-log sur plusieurs décades :

→ grande résolution (nombre de pts) sur la dernière décade, très faible sur la première

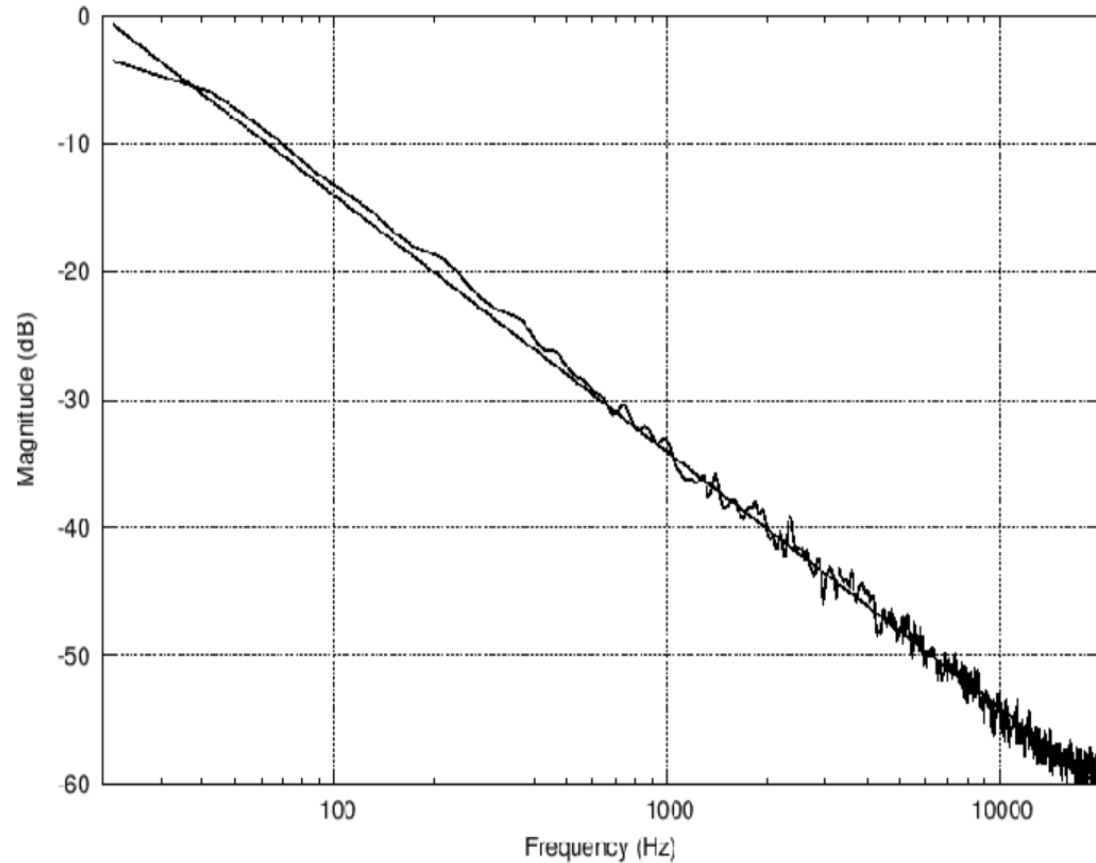
Importance du moyennage

Periodogram and Expected Roll-Off: One frame of length 512



$|FFT|^2$, 512 points bruit en $1/f$

Estimated PSD and Expected Roll-Off: Averaged 128 frames of length 512 each



$|FFT|^2$ 512 points bruit en $1/f$, moyenné 128 fois

Note: sur plusieurs décades comme ici, en plot log-log, résolution médiocre gauche et très bonne à droite

Un exemple d'algorithme de calcul de DSP

On a $N(>1024 \times 1000 \sim 1\text{M}$ ici) échantillons d'un signal $\text{DataA}[n]$, échantillonnés à 2MSPS. On veut en calculer la DSP sur un nombre de décades >1 (axe x en log...)

```
SAMPLING_FREQUENCY = 2000000.0 # 2MSPS used here
nfft=1024 #1024 points of fft in each decade
decades = 4 # for Fourier frequencies from 100Hz to 1MHz (with still some info <100Hz from the lowest decade)
window = scipy.signal.windows.get_window('blackmanharris', nfft) # blackmanharris windowing is used here

def PSDcore(dataA, nfft, decades, window):

    # single sided power spectral density
    scaling = 2.0 / (SAMPLING_FREQUENCY * (window * window).sum())

    psdA = []

    for decade in range(decades): # ie 0,1,2,3 here

        if decade > 0:
            dataA = scipy.signal.decimate(dataA, 10)

        fftA = rfft(window * np.reshape(dataA, (-1, nfft)))

        A = np.mean(fftA * fftA.conj(), axis=0).real * scaling * 10**decade
        relative_f = rfftfreq(nfft, 0.5)
        mask = np.ones(f.shape, dtype=bool)
        if decade != decades - 1:
            mask = mask & (relative_f > 0.08)
        if decade > 0:
            mask = mask & (relative_f <= 0.8)

        psdA.append(A[mask])

    psdA = np.concatenate(psdA[:-1])

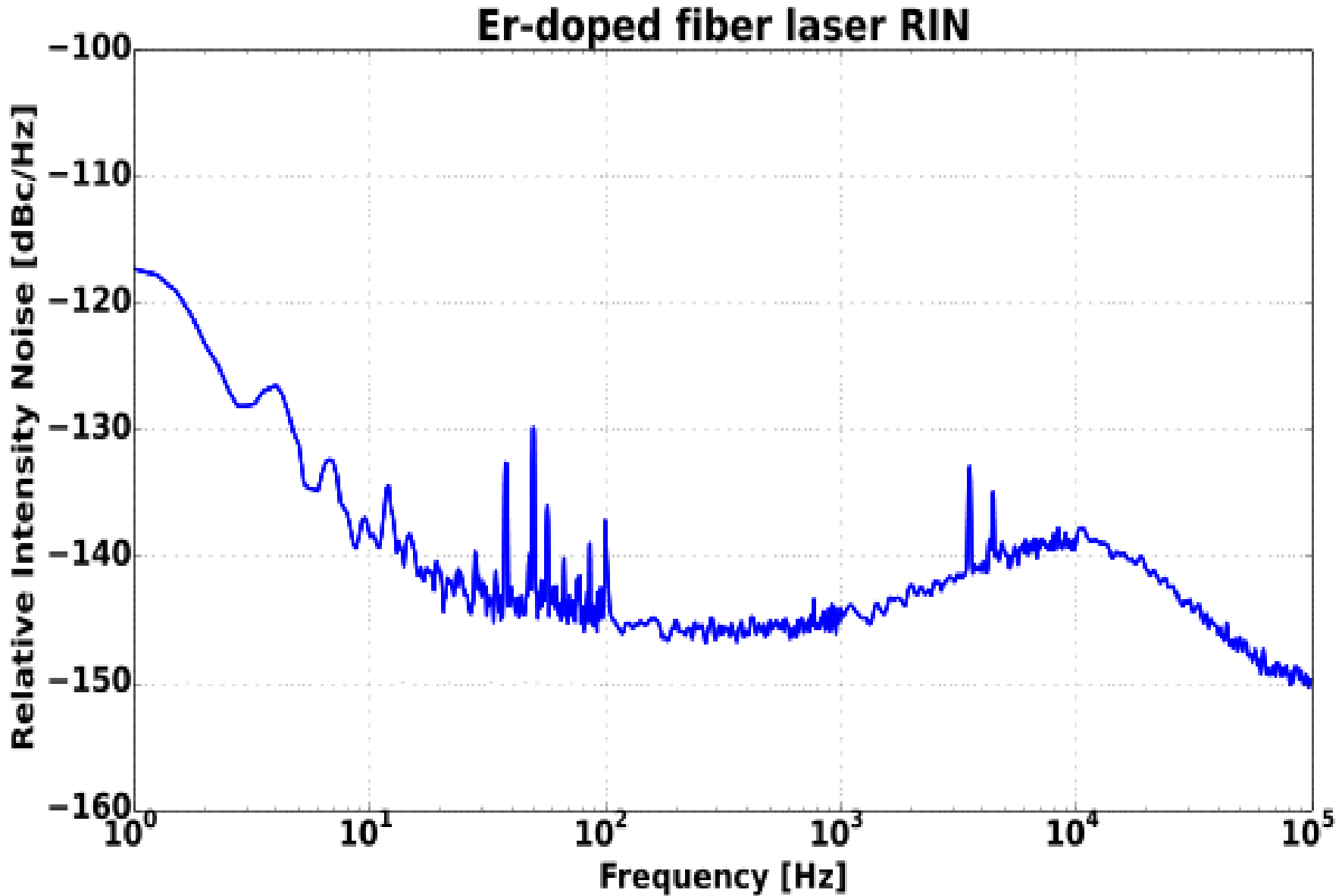
    return psdA
```

NB.:

Si les données arrivent continuellement, par blocs de N points, en moyennant le résultat de `PSDcore()` obtenu pour chaque bloc, on améliore continuellement l'estimation de la DSP

Un exemple d'algorithme de calcul de DSP

Un résultat typique de ce type d'algorithme:



L'écart-type/variance d'Allan

Instrument statistique introduit par David Allan pour caractériser les fluctuations de fréquence des oscillateurs.

Néanmoins généralisable pour tout types de mesures... $s(t) = s_0 + x(t)$ [unité]

Définition :

$$\sigma_x^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (x_{n+1} - x_n)^2 \rangle \quad (\text{Variance, [unité}^2\text{)])}$$

$$\sigma_x(\tau) = \sqrt{\frac{1}{2} \langle (x_{n+1} - x_n)^2 \rangle} \quad (\text{Ecart-type, [unité)])}$$

$$\text{avec : } x_n = \frac{1}{\tau} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} x(t) dt$$

Utilité :

$$\langle s(t) \rangle$$

- (beaucoup) plus rapide à estimer que PSD pour les temps caractéristiques “longs” (ie fréquences de Fourier basses)
- définie quand la PSD peut ne pas l'être (ex. dérive)
- définie quand la moyenne peut ne pas l'être (ex. dérive ou bruit BF coloré)
- donne le temps “utile” d'une mesure :

si la variance reste constante ou augmente à partir d'un temps caractéristique moyenner pendant τ est inutile, voire néfaste (le bruit de la mesure augmente quand on moyenne plus...) !

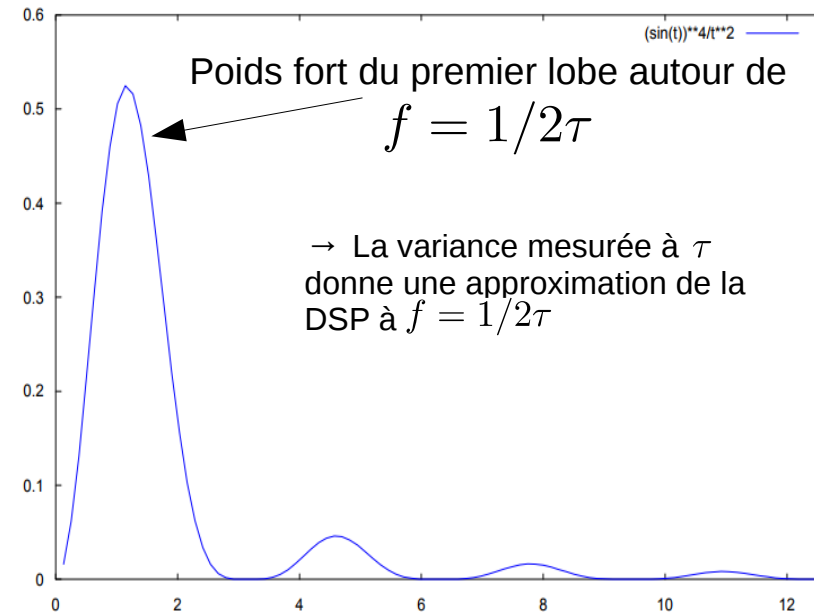
Lien DSP/ variance d'Allan : math

On peut calculer la variance d'Allan à partir de la DSP:

$$\sigma_x^2(\tau) = 2 \int_0^\infty S_x(f) \frac{\sin^4(\pi \tau f)}{(\pi f)^2}$$

L'inverse n'est pas vrai a priori... sauf si hypothèse de type de bruit, typiquement $S_x(f) \propto f^\alpha$

Type de bruit	$S_x(f)$	$\sigma_x^2(\tau)$
Drift linéaire	—	$K\tau^2$
Marche aléatoire	$h_{-2}f^{-2}$	$A\tau^1$
Scintillement (rose)	$h_{-1}f^{-1}$	$B\tau^0$
blanc	h_0f^0	$C\tau^{-1}$
bleu	h_1f^1	$D\tau^{-2}$
violet	h_2f^2	$E\tau^{-2}$



Avec :

$$K = \Delta^2/2 \text{ pour } \Delta \text{ le drift linéaire}$$

$$A = 2\pi^2/3$$

$$B = 2\ln(2)$$

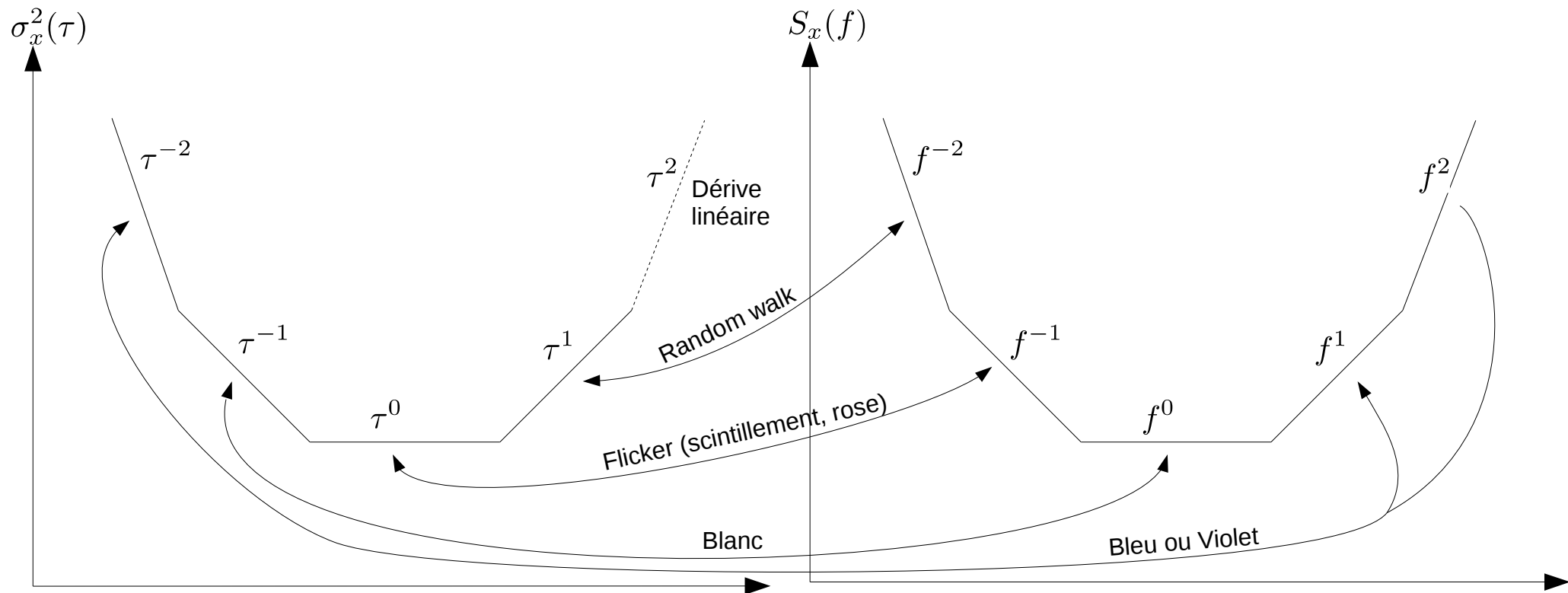
$$C = 1/2$$

$$D = [1.038 + 3\ln(2\pi f_h \tau)]/4\pi^2$$

$$D = 3f_h/4\pi^2$$

Note : tableau très utilisé en temps/fréquence pour la fluctuation de fréquence relative d'un oscillateur, mais tout aussi vrai dans le cas général décrit ici

Lien DSP/ variance d'Allan : graphique



La variance d'Allan permet d'identifier facilement le type de bruit (loi de puissance)

Elle ne permet pas de distinguer entre bruit en f^1 et f^2 . Il existe d'autres variances pour cela si vraiment nécessaire

calcul d'AVAR

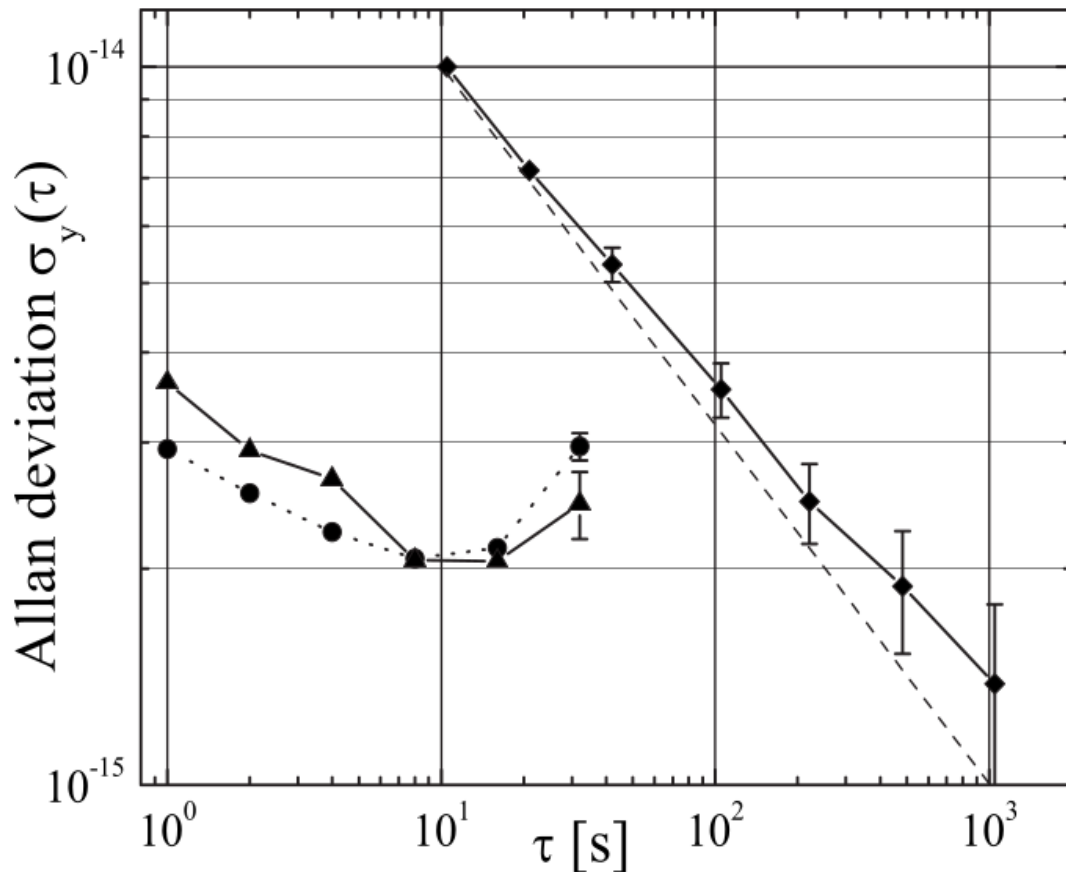
Exemple de packages/logiciels

Alavar www.alamath.com

Stable32 www.wriley.com

AllanTools (python module)

Allan (Matlab FileExchange)



Exemple code python

```
def adev(x, tau, sampl=1.0):  
    """Allan deviation"""  
  
    x = np.asarray(x)  
    tau = np.asarray(tau)  
  
    # allocate output vectors  
    adev = np.zeros(tau.size)  
    dadev = np.zeros(tau.size)  
  
    # samples  
    n = x.size  
    # partitioning  
    p = np.floor(tau * sampl).astype(int)  
  
    for i, m in enumerate(p):  
        d = x[0:n - n % m].reshape(-1, m)  
        y = np.mean(d, axis=1)  
        adev[i] = np.sqrt(0.5 * np.mean(np.diff(y)**2))  
        dadev[i] = adev[i] / np.sqrt(y.size)  
  
    return adev, dadev
```

Note : barre d'erreur en $\sigma(\tau)/\sqrt{N}$
pour N grand (N petit, un peu différent et
dépend du type de bruit...)

Cas d'un oscillateur sinusoidal

Boîte à outils pour un oscillateur...

Oscillateur : $s(t) = A_0 \cdot [1 + \alpha(t)] \cdot \cos[2\pi\nu_0 t + \phi_0 + \phi(t)]$

ν_0 : domaine GHz : oscillateur micro-onde

domaine 100's THz : oscillateur optique

$\alpha(t)$: bruit d'amplitude

(généralement négligé devant le bruit de phase, borné)

$\phi(t)$: bruit de phase

(non borné, toujours divergent)

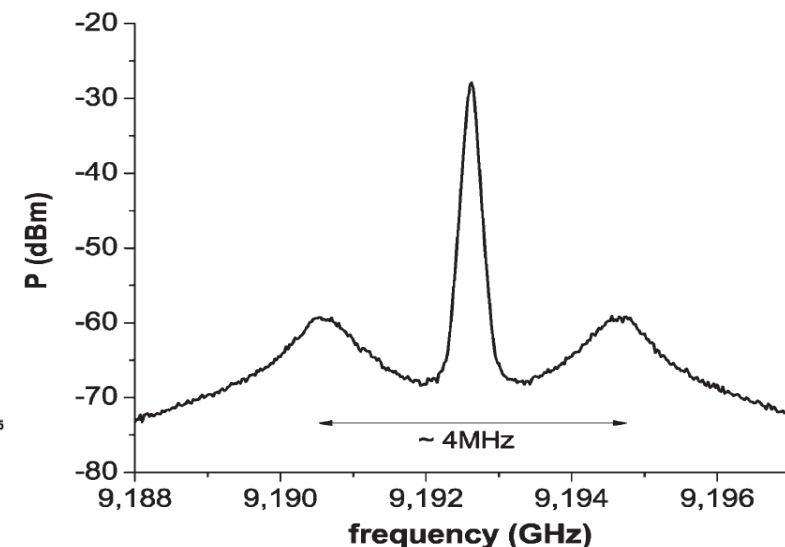
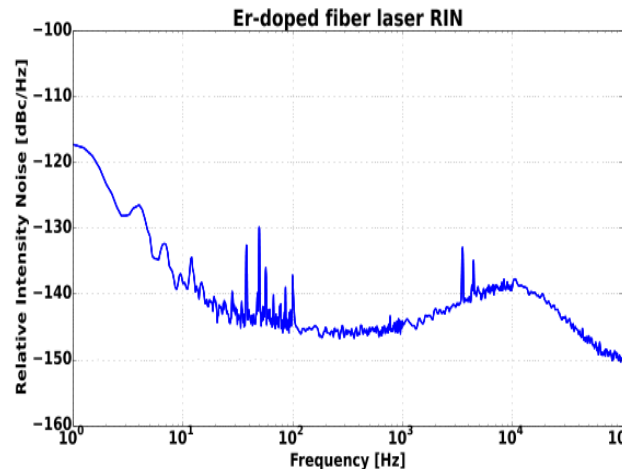
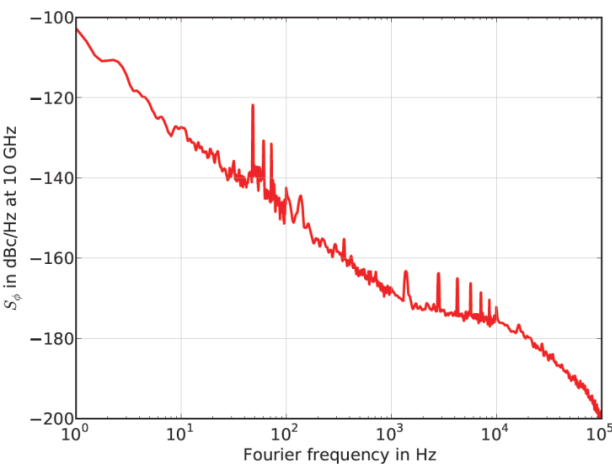
$\nu(t) = \nu_0 + d\phi/dt(t)$

fréquence instantanée

DSP Bruit de phase : $S_\phi(f)$

DSP Bruit d'amplitude (RIN) : $S_\alpha(f)$

DSP du signal : (analys. de spectre $S_s(f)$)



- + stabilité de fréquence (en Hz) : $\sigma_\nu(\tau)$
- + stabilité de fréquence relative : $\sigma_y(\tau)$ où $y = \nu/\nu_0$
- + stabilité d'amplitude (relative) : $\sigma_{\alpha/A_0}(\tau)$

+ Exactitude de fréquence

Les unités pour compter...

$$s(t) = A_0 \cdot [1 + \alpha(t)] \cdot \cos[2\pi\nu_0 t + \phi_0 + \phi(t)]$$

Bruit de phase :

$\phi(t)$ [rad] $\rightarrow S\phi(f)$ [rad²/Hz] (DSP unilatérale)

ou, plus usuellement [dB rad²/Hz] ou [dB rad/ $\sqrt{\text{Hz}}$]

(deux noms pour la même chose, ie $10 \cdot \log_{10}(S\phi(f))$)

Par convention, on utilise également $L_c(f) = 10 \cdot \log_{10}(S\phi(f)) - 3\text{dB}$ [dBc/Hz]

Bruit d'amplitude :

$\alpha(t)$ [relatif, sans unité] $\rightarrow S\alpha(f)$ [Hz⁻¹] (DSP unilatérale)

Usuellement, on utilise aussi pour le bruit d'amplitude

$L_c(f) = 10 \cdot \log_{10}(S\alpha(f)) - 3\text{dB}$ [dBc/Hz]

Les deux types de bruits se comptent en $L_c(f)$ [dBc/Hz] car lien historique avec $S_s(\nu'-\nu)$ (rapport sideband vs porteuse sur analyseur de spectre, mais attention, lien vrai uniquement sous conditions très restrictives de faible bruit)

Deux concepts de plus...

$$s(t) = A_0 \cdot [1 + \alpha(t)] \cdot \cos[2\pi\nu_0 t + \phi_0 + \phi(t)]$$

Largeur de raie d'un oscillateur:

Beaucoup de définitions différentes possibles et utilisées.

La plus raisonnable, pour bruit d'amplitude négligeable vs. bruit de phase:

Largeur de raie $\Delta\nu$ définie telle que :

$$\int_{\Delta\nu/2}^{\infty} S_{\phi}(f) \cdot df = \frac{2}{\pi}$$

(correspond à largeur spectre FWHM

pour du bruit blanc de phase $S_{\phi}(f) = S_{\nu}/f^2 = \text{cte}/f^2$)

Gigue temporelle ("timing jitter")

$$S_{\Delta t}(f) = \frac{S_{\phi}(f)}{(2\pi\nu_0)^2} \quad \text{gigue intégré} = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} S_{\Delta t}(f) df$$

Particulièrement utile pour comparer deux oscillateurs oscillant à fréquences porteuses différentes

Un mot de précaution important

Parler d'un "oscillateur de très bon bruit de phase" dans l'absolu – sans plus de précision – n'a aucun sens.

Le bruit de phase ne s'entends que rapporté à la fréquence de porteuse !!!

Exemple.:

- 170dBc/Hz à 10kHz d'une porteuse de 10GHz est un record mondial recherche actuel
- 170dBc/Hz à 10kHz d'une porteuse de 100MHz est juste normal pour un bon quartz commercial à qqes k€/pièce (ex. Rakon LNO100)

Le bruit de timing est normalisé à la fréquence de la porteuse, il permet de comparer des oscillateurs à fréquences différentes:

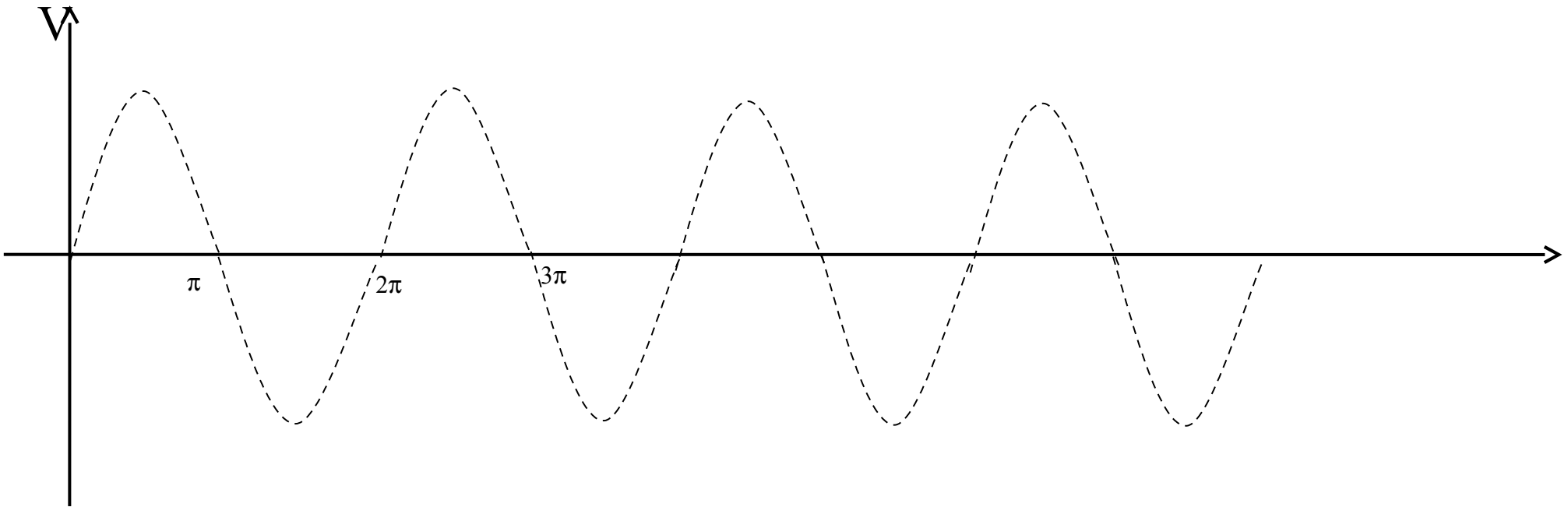
Division de fréquence : effet sur le bruit de phase

f_c [Hz] \rightarrow f_c/N [Hz] alors $\Delta\phi \rightarrow \Delta\phi/N$ [rad]

$S_\phi(f)$ [dBc/Hz] \rightarrow $S_\phi(f) - 20 \cdot \log_{10}(N)$ [dBc/Hz]

Grande
réduction du
bruit si N est
grand...

Exemple : division par 2



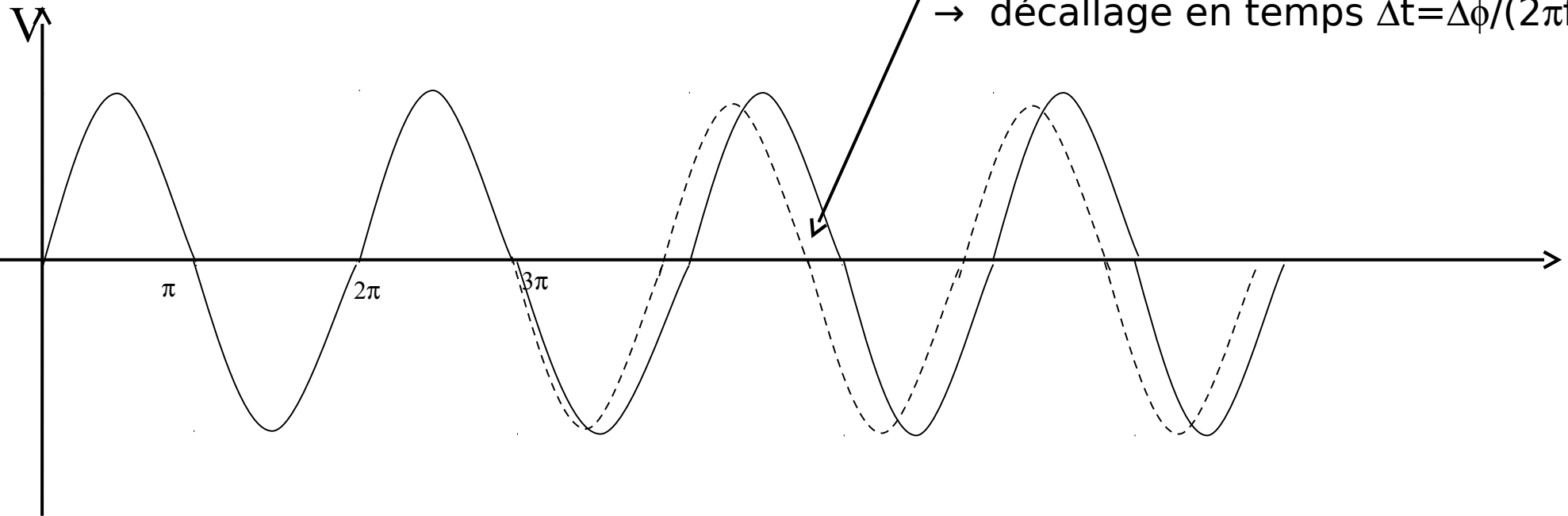
Division de fréquence : effet sur le bruit de phase

f_c [Hz] \rightarrow f_c/N [Hz] alors $\Delta\phi \rightarrow \Delta\phi/N$ [rad]

$S_\phi(f)$ [dBc/Hz] \rightarrow $S_\phi(f) - 20 \cdot \log_{10}(N)$ [dBc/Hz]

Grande
réduction du
bruit si N est
grand...

Exemple : division par 2



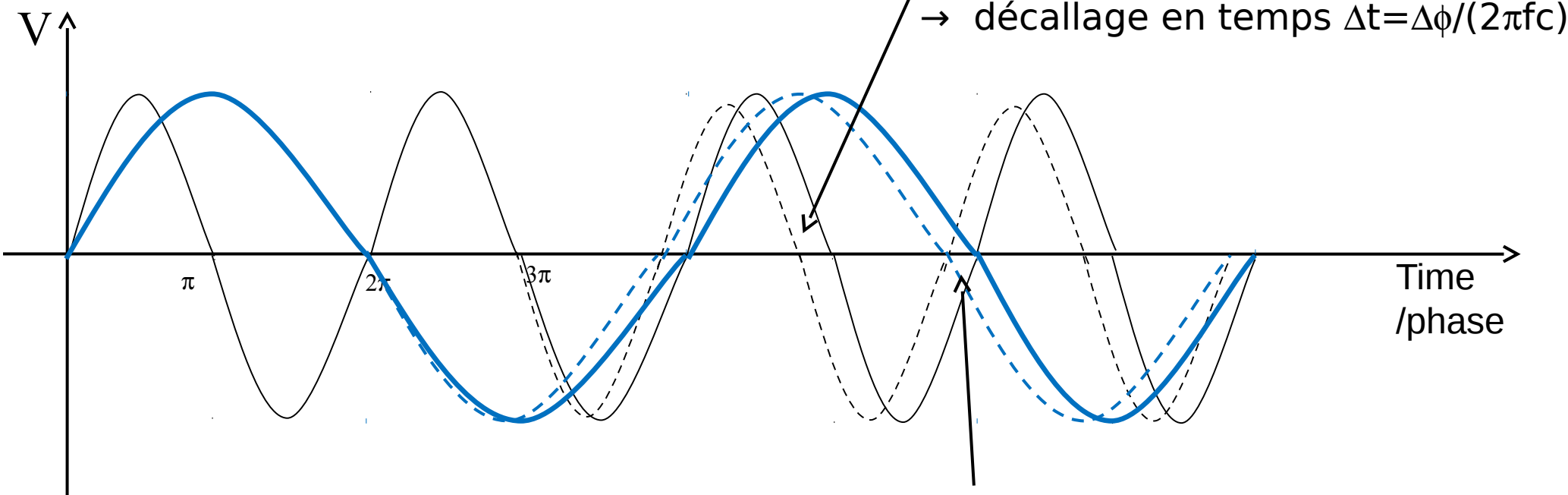
Division de fréquence : effet sur le bruit de phase

$$f_c \text{ [Hz]} \rightarrow f_c/N \text{ [Hz]} \quad \text{then } \Delta f \rightarrow \Delta f/N \text{ [rad]}$$

$$S_\phi(f) \text{ [dBc/Hz]} \rightarrow S_\phi(f) - 20 \cdot \log_{10}(N) \text{ [dBc/Hz]}$$

Large noise reduction if N is large...

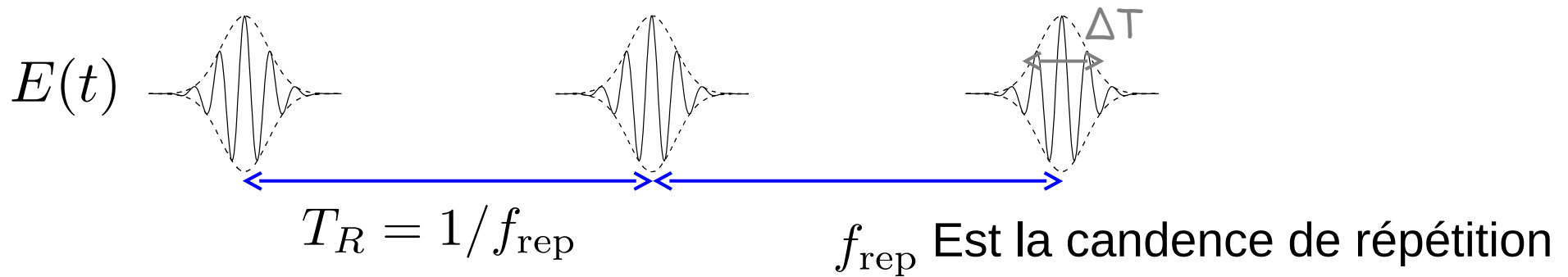
Exemple : division par 2



Décalage en temps $\Delta t = \Delta\phi / (2\pi f_c)$ sur $f_c/2$
→ déphasage $\Delta\phi' = \Delta\phi / 2$ sur $f_c/2$

Cas d'un laser femto

Sortie d'un laser mode-bloqué



Impulsions intra-cavité avec

$$v_g \neq v_\phi$$

→ Les impulsions “n'explorent pas”, donc il n'y a pas de dispersion de vitesse de groupe (GVD), MAIS ∃ une dispersion de vitesse de phase !

GVD nulle:

$$\frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega} = \frac{1}{v_g} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial^m k(\omega)}{\partial \omega^m} = 0, \forall m > 1$$

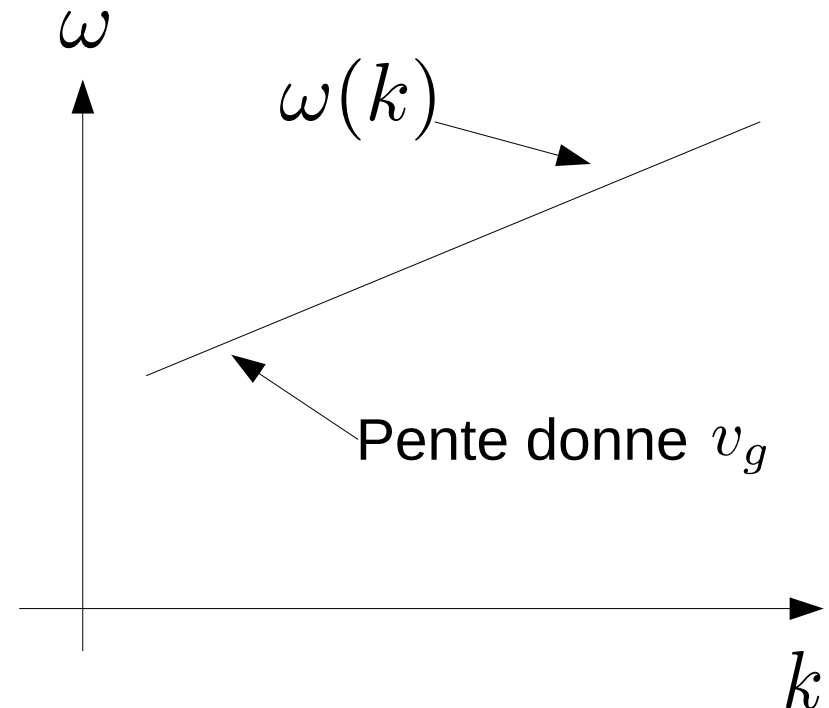
Vérifié pour:

$$k(\omega) = k_0 + \omega/v_g$$

Correspondant à :

$$n = c \left(\frac{1}{v_g} + \frac{k}{\omega} \right)$$

(en moyenne sur 1 tour de la cavité)



Sortie d'un laser mode-bloqué

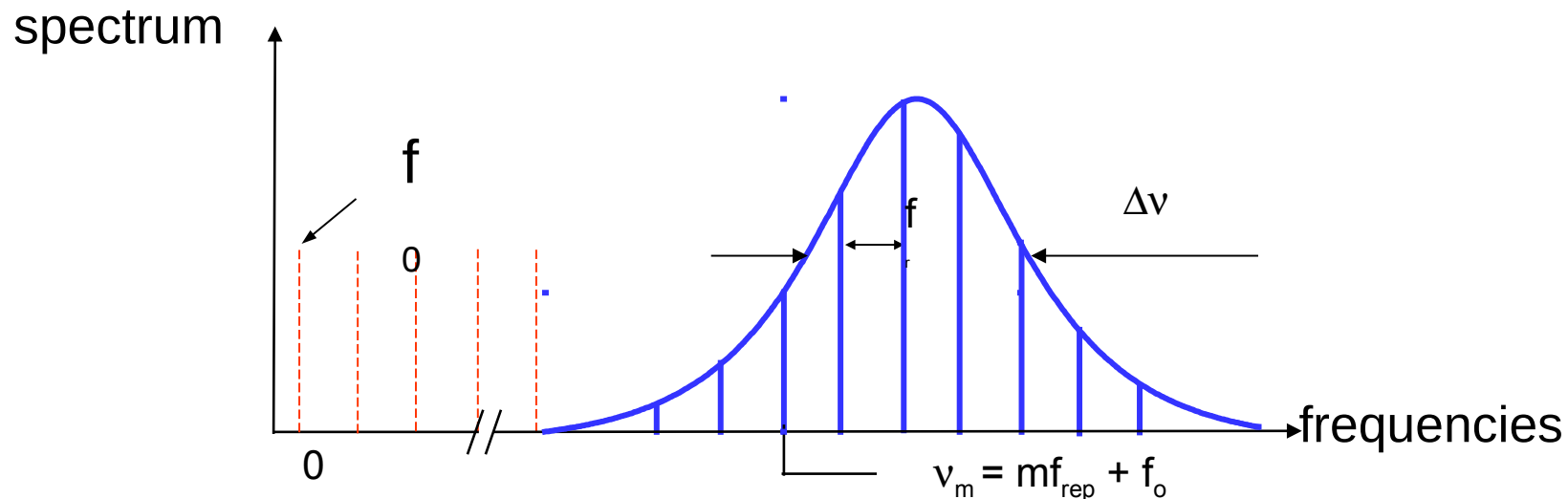
If we plug $n = c \left(\frac{1}{v_g} + \frac{k}{\omega} \right)$ into the freq. of the FP cavity modes $\omega_N = N \frac{2\pi}{nL}$
and solve for the frequencies, we get: $\omega_N = N \frac{2\pi v_g}{L} - k_0 v_g$

This is the celebrated formula

$$\nu_N = N \times f_{\text{rep}} + f_0$$

Note :

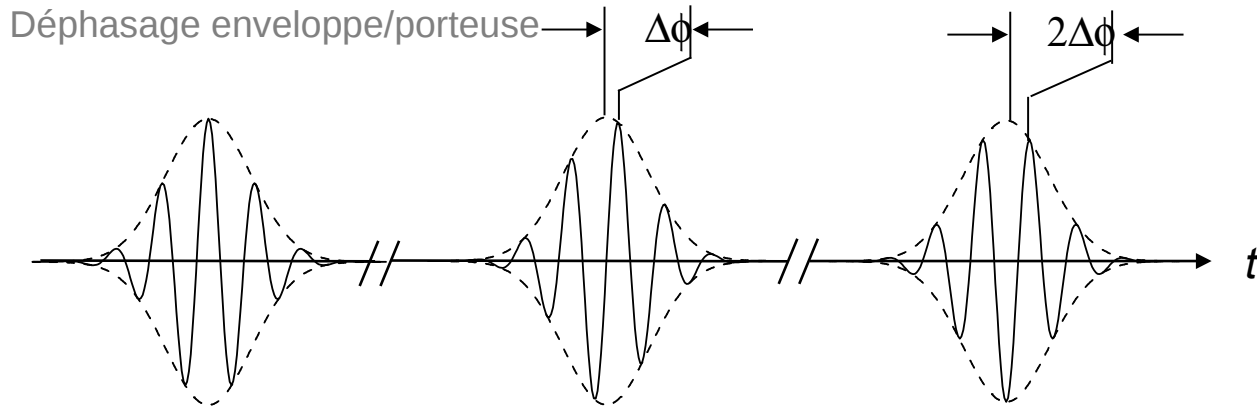
usually, we choose N
such that $0 < f_0 < f_{\text{rep}}/2$



The comb is a « ruler » in optical frequency domain,
with one mode every f_{rep}

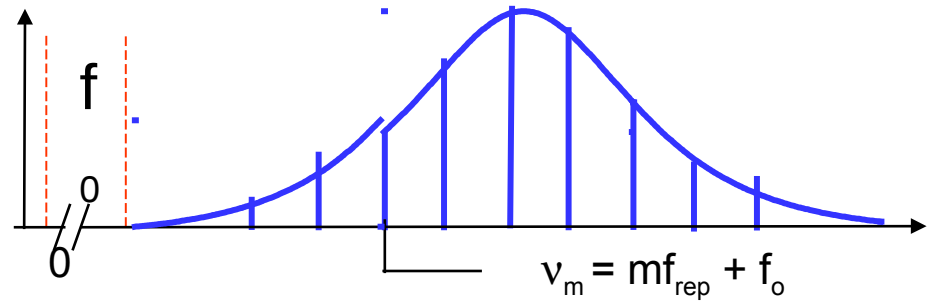
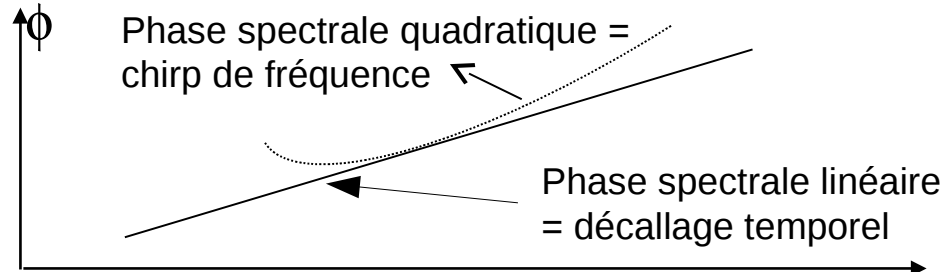
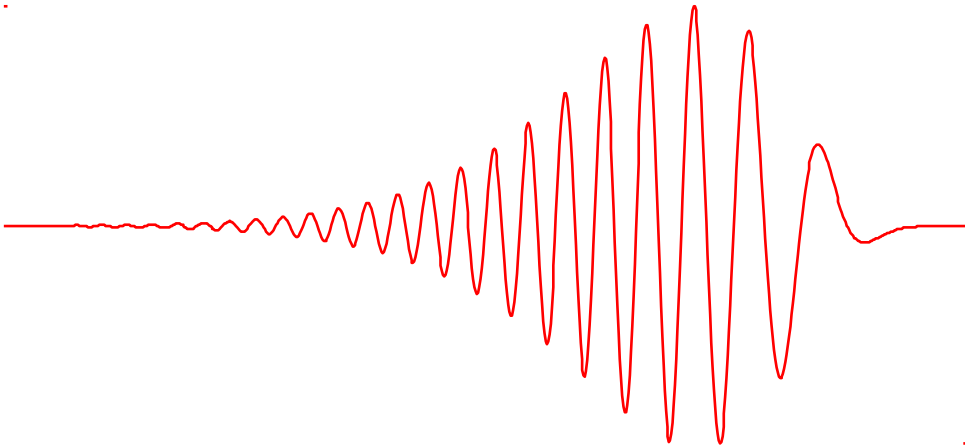
Sortie d'un laser mode-bloqué

Dans le domaine tempore (transformation de Fourier), cela correspond à :

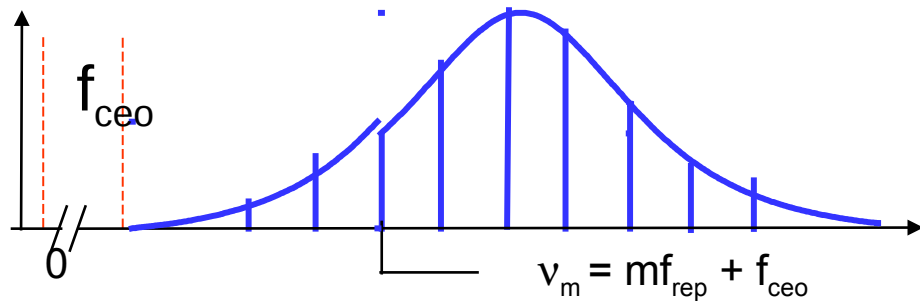


$$f_{ceo} = f_{rep} \frac{\Delta\phi}{2\pi}$$

Après sortie de la cavité, l'impulsion peut prendre plus de dispersion ($GVD \neq 0$: composantes bleus et rouge se propagent à vitesses différentes)
→ impulsion chirpée en temporel // phase spectrale en fréquentiel



Degrés de liberté d'un laser mode-bloqué



Paramètres bruités typiques:

- amplitude globale
- f_{rep} (ϕ_{rep})
- f_{ceo} (ϕ_{ceo})
- autres ? (enveloppe/phase spectrale,...)
-

Sources de bruit :

1) Techniques

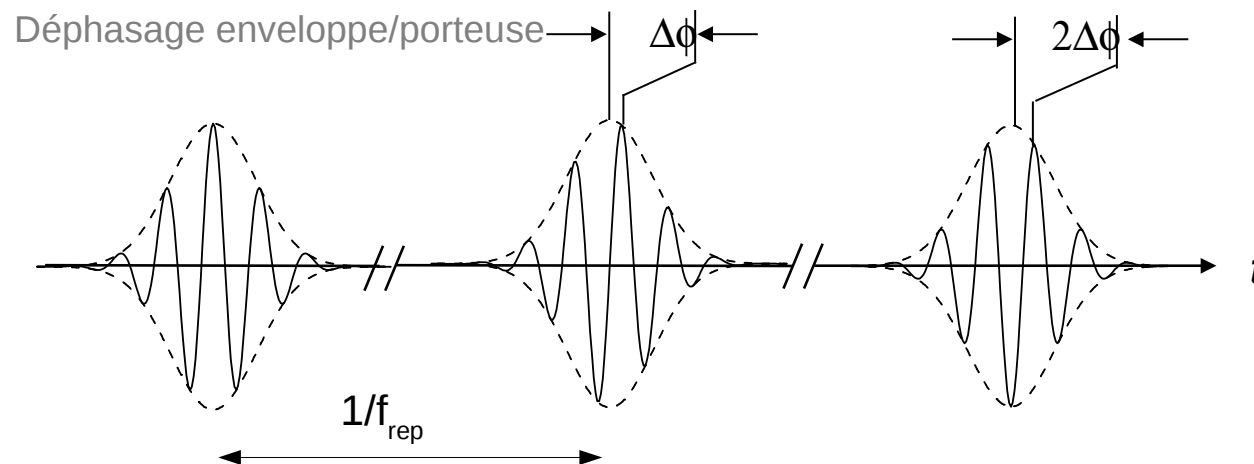
- acoustique
- température, pression
- bruit de la pompe

2) Quantiques

- émission spontanée
- + couplages

fréquences/gain/dispersion

Dans tous les cas filtré par réponse dynamique du laser



Asservissement possible :

actuateurs typiques PZT, puissance pompe, alignement pompe, EOM,...

Actuateur a tjs +/-cross talk vers différents paramètres (fonctions de transfert)

Modèle de la bande élastique (mais valable à BF, les fonctions de transferts ne sont en général pas équivalentes...)